

ISSN 0579–9368



НАУЧНЫЙ
ЖУРНАЛ

*Основан
в 1946 году*

Вестник Московского университета

Серия 1

математика
механика

6 / 2020

Вестник Московского университета

Серия 1 МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА

Издательство Московского университета

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Основан в ноябре 1946 г.

№ 6 · 2020 · ноябрь – декабрь

Выходит один раз в два месяца

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

- Чубариков В. Н.* О кратных тригонометрических суммах, связанных с простыми числами. 3
- Гашиков С. Б.* Замечание о быстром вычислении транзитивного замыкания графов и умножении целочисленных матриц. 14
- Ветозин А. Н.* Строение множеств точек полунепрерывности ε -емкости неавтономных динамических систем, непрерывно зависящих от параметра 19
- Захарян Ю. Н., Фоменко Т. Н.* О точках совпадения для пары многозначных отображений типа Замфиреску 26

Механика

- Звягин А. В., Удалов А. С.* Метод разрывных смещений высокого порядка точности в механике трещин 34
- Карапетян А. В., Чаплыгина М. П.* Бифуркационный анализ системы трех связанных тел в однородном гравитационном поле 40
- Тирский Г. А., Брыкина И. Г., Жлуктов С. В.* Численно-аналитический метод решения уравнений физической теории метеоров при переменном параметре абляции 48

Краткие сообщения

- Боков Г. В., Дробышев А. С.* Критерий нейропорожденности автоматных функций с задержкой. 54
- Кибкало В. А.* Свойство некомпактности слоев и особенностей неевклидовой системы Ковалевской на пучке алгебр Ли. 56
- Лата А. Н.* Унарные алгебры без собственных подалгебр 60
- Мартынова Е. Д.* Лагранжево представление семейства объективных производных Гордона–Шоултера при простом сдвиге 63
- Акуленко Л. Д., Георгиевский Д. В., Нестеров С. В.* Метод ускоренной сходимости в задаче о крутильных колебаниях неоднородного по толщине круглого диска 66
- Указатель статей и материалов, опубликованных в журнале “Вестник Московского университета. Сер. 1, Математика. Механика” в 2020 году 69

CONTENTS

Mathematics

| | |
|---|----|
| <i>Chubarikov V. N.</i> Multiple trigonometric sums related to prime numbers | 3 |
| <i>Gashkov S. B.</i> Remarks on fast computation of transitive closure of graphs and multiplication of integer-valued matrices | 14 |
| <i>Vetokhin A. N.</i> Structure of sets of semicontinuity points of ε -capacity of non-autonomous dynamical systems depending continuously on a parameter | 19 |
| <i>Zakharyan Yu. N. and Fomenko T. N.</i> Coincidence points for a pair of Zamfirescu type mappings | 26 |

Mechanics

| | |
|---|----|
| <i>Zvyagin A. V. and Udalov A. S.</i> The displacement discontinuity method of higher order of accuracy in the crack mechanics | 34 |
| <i>Karapetyan A. V. and Chaplygina M. P.</i> Bifurcation analysis of a system of three connected bodies in a homogeneous gravitational field | 40 |
| <i>Tirskii G. A., Brykina I. G., and Zhukhtov S. V.</i> Numerical-analytical method to solve the physical meteor theory equations under a variable ablation parameter | 48 |

Short notes

| | |
|--|----|
| <i>Bokov G. V. and Drobyshch A. S.</i> Criterion of neuro-generation of automata functions with delay | 54 |
| <i>Kibkalo V. A.</i> Non-compactness property of layers and singularities of non-Euclidean Kovalevskaya system on Lie algebra pencil | 56 |
| <i>Lata A. N.</i> Unary algebras without proper subalgebras | 60 |
| <i>Martynova E. D.</i> Lagrange representation of the family of objective Gordon–Showalter derivatives under simple shift | 63 |
| <i>Akulenko L. D., Georgievskii D. V., and Nesterov S. V.</i> Accelerated convergence method for the problem on rotating oscillations of a round disk inhomogeneous in thickness | 66 |
| <i>Index of papers and materials published in the journal “Vestnik Moskovskogo Universiteta. Ser. 1, Matematika. Mekhanika” during 2020 year</i> | 69 |

To buy separate issues of “Moscow University Mathematics Bulletin” and “Moscow University Mechanics Bulletin” or subscribe to them one should refer to

Allerton Press Inc.
250 West 57th Street,
New York, USA, NY 10107.
Fax: 646-424-96-95

Математика

УДК 511.3

О КРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММАХ,
СВЯЗАННЫХ С ПРОСТЫМИ ЧИСЛАМИВ. Н. Чубариков¹

Найдены оценки кратных тригонометрических сумм специального вида, подобные современной оценке дзетовой суммы, что позволяет оценить тригонометрические суммы, скрученные с многомерной функцией делителей, и соответствующие суммы с простыми числами.

Ключевые слова: кратные тригонометрические суммы; характеры Дирихле; тригонометрические суммы, скрученные с многомерной функцией делителей; аналог дзетовых сумм по простым числам; теорема о среднем для кратных тригонометрических сумм.

Estimates of multiple trigonometric sums similar to the modern estimate of the zeta-sum are obtained. This allows us to estimate trigonometric sums twisted with the multivariate divisor function and corresponding sums with primes.

Key words: multiple trigonometric sums; Dirichlet's characters; trigonometric sums twisted with the multivariate divisor function; analogue of the zeta-sum with primes; mean-value theorem for multiple trigonometric sums.

Введение. Цель настоящей статьи — подготовительная работа для оценок сумм по простым числам вида

$$\sum_{p \leq N} e^{2\pi i \frac{t}{p}}; \quad \sum_{p \leq N} B_s \left(\left\{ \frac{t}{p} \right\} \right); \quad \sum_{p \leq N} (p+l)^{it}, l \neq 0; \quad \sum_{p \leq N} (p+k)^{it} \chi_q(p+k), k \not\equiv 0 \pmod{q},$$

где l, k — целые числа; p пробегает простые числа; $\chi_q(n)$ — характер Дирихле от вычета n по некоторому модулю $q > 1$; $B_s(\{x\})$ — функция Бернулли с номером s от дробной части вещественного числа x .

Первые нетривиальные оценки тригонометрических сумм с простыми числами и соответствующие фундаментальные постановки задач в теории простых чисел принадлежат И. М. Виноградову [1].

В основе оценок этих сумм по простым лежат оценки при некоторых $v \geq 1$ сумм, скрученных с многомерной функцией делителей числа, имеющих вид

$$\sum_{n \leq N} \tau_v(n) e^{2\pi i \frac{t}{n}}; \quad \sum_{n \leq N} \tau_v(n) B_s \left(\left\{ \frac{t}{n} \right\} \right); \quad \sum_{n \leq N} \tau_v(n) (n+l)^{it}, l \neq 0;$$

$$\sum_{n \leq N} \tau_v(n) (n+k)^{it} \chi_q(n+k), k \not\equiv 0 \pmod{q},$$

где $\tau_v(n)$ — многомерная функция делителей числа n , обозначающая число решений уравнения $n_1 \dots n_v = n$ в натуральных числах n_1, \dots, n_v .

Первым шагом здесь являются оценки кратных тригонометрических сумм с равноправными промежутками изменения переменных суммирования

$$M_s < M'_s \leq 2M_s, M_1 \leq M_s \leq 2M_1, s = 1, \dots, r,$$

¹ Чубариков Владимир Николаевич — доктор физ.-мат. наук, проф., зав. каф. математических и компьютерных методов анализа мех.-мат. ф-та МГУ; Московский центр фундаментальной и прикладной математики, e-mail: chubarikov@outlook.com.

Chubarikov Vladimir Nikolaevich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Head of Chair of Mathematical and Computer Methods of Analysis; Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics.

т.е. сумм вида

$$\sum_{M_1 < n_1 \leq M'_1} \cdots \sum_{M_r < n_r \leq M'_r} e^{2\pi i \frac{t}{n_1 \dots n_r}}; \quad \sum_{M_1 < n_1 \leq M'_1} \cdots \sum_{M_r < n_r \leq M'_r} B_s \left(\left\{ \frac{t}{n_1 \dots n_r} \right\} \right);$$

$$\sum_{M_1 < n_1 \leq M'_1} \cdots \sum_{M_r < n_r \leq M'_r} (n_1 \dots n_r + l)^{it}, l \neq 0;$$

$$\sum_{M_1 < n_1 \leq M'_1} \cdots \sum_{M_r < n_r \leq M'_r} (n_1 \dots n_r + k)^{it} \chi_q(n_1 \dots n_r + k), k \not\equiv 0 \pmod{q}.$$

Отметим, что полученные здесь результаты подобны теореме И. М. Виноградова для дзетовых сумм [1–3] (см. также [4, 5]).

Настоящая работа продолжает наши исследования по кратным тригонометрическим суммам с простыми числами [6–8].

1. Формулировка основных утверждений.

Теорема 1. Пусть $n \geq 25, r$ — натуральные числа,

$$M_s \leq M'_s < 2M_s (1 \leq s \leq r), 1 < M_1 \leq M_2, \dots, M_r \leq 2M_1,$$

$$t = M_1^{n-\theta}, 0 \leq \theta \leq 1,$$

$$S = \sum_{m_1=M_1}^{M'_1} \cdots \sum_{m_r=M_r}^{M'_r} e^{2\pi i F(m_1 \dots m_r)}, F(x) = \frac{t}{x}.$$

Тогда найдется положительная постоянная γ , такая, что

$$S \ll M_1 \dots M_r M_1^{-\rho}, \rho = \frac{\gamma}{m_0}, m_0 = r \binom{n+r}{r+1}.$$

Теорема 2. Пусть $n \geq 25, r$ — натуральные числа, $k \neq 0$ — целое,

$$M_s \leq M'_s < 2M_s (1 \leq s \leq r), 1 \leq M_1 \leq M_2, \dots, M_r \leq 2M_1,$$

$$t = M_1^{n-\theta}, 0 \leq \theta \leq 1,$$

$$T = \sum_{m_1=M_1}^{M'_1} \cdots \sum_{m_r=M_r}^{M'_r} e^{2\pi i t \ln(m_1 \dots m_r + k)}.$$

Тогда найдется положительная постоянная γ , такая, что

$$T \ll M_1 \dots M_r M_1^{-\rho}, \rho = \frac{\gamma}{m_0}, m_0 = r \binom{n+r}{r+1}.$$

2. Вспомогательные утверждения. Пусть $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_r), 1 < P_1 \leq P_2 \leq \dots \leq P_r$, и пусть $J = J(\mathbf{P}; n, k, r)$ обозначает число решений системы диофантовых уравнений вида

$$\sum_{j=1}^{2k} (-1)^j x_{1j}^{t_1} \dots x_{rj}^{t_r} = 0, \quad 0 \leq t_1 + \dots + t_r \leq n, \quad t_1, \dots, t_r \geq 0,$$

где каждое неизвестное значение x_{ij} принимает все целые значения от 1 до P_i , при этом $P_i \rightarrow \infty$, а постоянные n, k, r являются натуральными числами. Имеем

$$J = J(\mathbf{P}; n, k, r) = \int \cdots \int_{\Omega} |S(\mathbf{A})|^{2k} d\mathbf{A},$$

где

$$S(\mathbf{A}) = S(\mathbf{A}; \mathbf{P}; n, k, r) = \sum_{x_1}^{P_1} \cdots \sum_{x_r=1}^{P_r} \exp \{2\pi i f(x_1, \dots, x_r)\},$$

причем

$$f(x_1, \dots, x_r) = \sum_{\substack{t_1=0 \\ \dots \\ t_1+\dots+t_r \leq n}}^n \cdots \sum_{t_r=0}^n \alpha(t_1, \dots, t_r) x_1^{t_1} \cdots x_r^{t_r},$$

символ Ω обозначает единичный куб размерности $m = \binom{n+r}{r}$ следующего вида:

$$0 \leq \alpha(t_1, \dots, t_r) < 1, \quad 0 \leq t_1, \dots, t_r, t_1 + \dots + t_r \leq n.$$

Лемма [9]. Пусть $3 \leq n, 2 \leq r$ — натуральные числа, $0 \leq \tau$ — целое число, $m = \binom{n+r}{r}$, $m_1 = \frac{nr}{r+1}m$, и пусть $k \geq m\tau$. Тогда для величины $J = J(\mathbf{P}; n, k, r)$ имеем оценку

$$J \leq D(\tau)(P_1 \dots P_r)^{2k} P_1^{-\Delta(\tau)},$$

где

$$\Delta(\tau) = m_0(1 - (1 - 1/n)^\tau), \quad D(\tau) = 2^{nr}(n+1)^n(km^{-1})^{2k}.$$

3. Доказательство теоремы 1. В сумме $S = S(\mathbf{M})$, $\mathbf{M} = (M_1, \dots, M_r)$, произведем сдвиги промежутков суммирования по m_1, \dots, m_r на величины u_1v_1, \dots, u_rv_r . В понятных обозначениях получим

$$S = S(\mathbf{M}) = \sum_{M_1 - u_1v_1 < m_1 \leq M'_1 - u_1v_1} \cdots \sum_{M_r < m_r \leq M'_r} - \sum_{M_1 - u_1v_1 < m_1 \leq M_1} \cdots \sum_{M_r < m_r \leq M_r} + \\ + \sum_{M'_1 - u_1v_1 < k \leq M'_1} \cdots \sum_{M_r < m_r \leq M'_r}.$$

Отсюда находим

$$S(\mathbf{M}) = \sum_{M_1 < m_1 \leq M'_1} \cdots \sum_{M_r < m_r \leq M'_r} e^{2\pi i F(m_1 - u_1v_1, \dots, m_r - u_rv_r)} + 2\theta(u_1v_1 + \dots + u_rv_r)M_2 \dots M_r, |\theta| \leq 1.$$

Возьмем $P = [M_1^{1/3}]$, $1 \leq u_1, v_1, \dots, u_r, v_r \leq P$, и просуммируем предыдущее равенство по переменным $u_1, v_1, \dots, u_r, v_r$ в пределах от 1 до P . Имеем

$$|S(\mathbf{M})| \leq P^{-2r} \sum_{M_1 < m_1 \leq M'_1} \cdots \sum_{M_r < m_r \leq M'_r} |W(\mathbf{m})| + 2rP^{-2r+2}M_2 \dots M_r, \mathbf{m} = (m_1, \dots, m_r),$$

где

$$W(\mathbf{m}) = \sum_{u_1=1}^P \sum_{v_1=1}^P \cdots \sum_{u_r=1}^P \sum_{v_r=1}^P \exp(2\pi i(F(m_1 - u_1v_1, \dots, m_r - u_rv_r) - F(m_1, \dots, m_r))).$$

Положим $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r)$, $x_s = u_s v_s m_s^{-1}$, $1 \leq s \leq r$,

$$F(m_1 - m_1x_1, \dots, m_r - m_r x_r) - F(m_1, \dots, m_r) = \frac{t}{m_1 \dots m_r} F_1(x_1, \dots, x_r).$$

Далее разложим функцию

$$F_1(x_1, \dots, x_r) = (1 - x_1)^{-1} \dots (1 - x_r)^{-1} - 1$$

по формуле Тейлора до члена с номером $n_0 = 3n$ с остатком в форме Лагранжа. При некотором $0 < \theta_1 < 1$ получим

$$F_1(x_1, \dots, x_r) = \Phi(x_1, \dots, x_r) + \Upsilon(x_1, \dots, x_r),$$

где

$$\Phi(x_1, \dots, x_r) = \sum_{\nu=1}^{n_0} \frac{1}{\nu!} d_{\mathbf{h}}^{\nu} F_1(0, \dots, 0) \Big|_{\mathbf{h}=\mathbf{x}} = \sum_{\substack{s_1=0 \\ s_1+\dots+s_r \leq n_0}}^{n_0} \dots \sum_{s_r=0}^{n_0} x_1^{s_1} \dots x_r^{s_r},$$

$$\Upsilon(\mathbf{x}) = \frac{1}{(n_0+1)!} d_{\mathbf{h}}^{n_0+1} F_1(-\theta_1 x_1, \dots, -\theta_1 x_r) \Big|_{\mathbf{h}=\mathbf{x}}.$$

Следовательно,

$$W = W(\mathbf{m}) = W_1 + R,$$

где

$$W_1 = \sum_{u_1=1}^P \sum_{v_1=1}^P \dots \sum_{u_r=1}^P \sum_{v_r=1}^P \exp\left(2\pi i \frac{t}{m_1 \dots m_r} \Phi\left(\frac{u_1 v_1}{m_1}, \dots, \frac{u_r v_r}{m_r}\right)\right) =$$

$$= \sum_{u_1, \dots, u_r=1}^P \sum_{v_1, \dots, v_r=1}^P \exp 2\pi i G(u_1 v_1, \dots, u_r v_r),$$

причем

$$G(u_1 v_1, \dots, u_r v_r) = \sum_{\substack{s_1=0 \\ s_1+\dots+s_r \leq n_0}}^{n_0} \dots \sum_{s_r=0}^{n_0} b(s_1, \dots, s_r) (u_1 v_1)^{s_1} \dots (u_r v_r)^{s_r},$$

$$b(s_1, \dots, s_r) = \frac{t}{m_1^{s_1+1} \dots m_r^{s_r+1}}.$$

Оценим остаток R . Имеем

$$|R| \leq \sum_{u_1, v_1, \dots, u_r, v_r=1}^P \left| 1 - \exp\left(2\pi i \frac{t}{m_1 \dots m_r} \Upsilon\left(\frac{u_1 v_1}{m_1}, \dots, \frac{u_r v_r}{m_r}\right)\right) \right| \leq$$

$$\leq 2\pi \sum_{u_1, v_1, \dots, u_r, v_r=1}^P \left| \frac{t}{m_1 \dots m_r} \Upsilon\left(\frac{u_1 v_1}{m_1}, \dots, \frac{u_r v_r}{m_r}\right) \right| \leq$$

$$\leq 2\pi \sum_{u_1, v_1, \dots, u_r, v_r=1}^P \left| \frac{t}{m_1 \dots m_r} \right| \cdot \left| \frac{1}{(n_0+1)!} d_{\mathbf{h}}^{n_0+1} F_1\left(-\theta_1 \frac{u_1 v_1}{m_1}, \dots, -\theta_1 \frac{u_r v_r}{m_r}\right) \Big|_{\mathbf{h}=\mathbf{w}} \right| = R_1,$$

где

$$\mathbf{w} = \left(\frac{u_1 v_1}{m_1}, \dots, \frac{u_r v_r}{m_r}\right).$$

Далее находим

$$|R_1| \leq 2\pi 2^{n_0+1} \frac{|t|}{M_1 \dots M_r} \sum_{u_1, v_1, \dots, u_r, v_r=1}^P \sum_{\substack{s_1=0 \\ s_1+\dots+s_r=n_0+1}}^{n_0+1} \dots \sum_{s_r=0}^{n_0+1} \frac{P^{2s_1}}{M_1^{s_1}} \dots \frac{P^{2s_r}}{M_r^{s_r}} \leq$$

$$\leq 2^{n_0+4} \binom{n_0+r}{r-1} P^{2(n_0+r+1)} \frac{|t|}{M_1 \dots M_r} \frac{1}{M_1^{n_0+1}} \leq 2^{n_0+4} \binom{n_0+r}{r-1} P^n \left(\frac{P^2}{M_1}\right)^{n_0+r+1}.$$

Оценим сумму W_1 :

$$|W_1| \leq \sum_{u_1=1}^P \dots \sum_{u_r=1}^P \left| \sum_{v_1=1}^P \dots \sum_{v_r=1}^P \exp\left(2\pi i \frac{t}{m_1 \dots m_r} \Phi\left(\frac{u_1 v_1}{m_1}, \dots, \frac{u_r v_r}{m_r}\right)\right) \right|.$$

Возведем неравенство для суммы W_1 в степень $2l$, $l = 12m_0 = ml_0$, где

$$m = \binom{n_0 + r}{r}, m_0 = r \binom{n_0 + r + 1}{r + 1} = \frac{rnm}{r + 1},$$

и воспользуемся неравенством Гёльдера. Получим

$$|W_1|^{2l} \leq P^{r(2l-1)} \sum_{v_{1,1}, \dots, v_{l,r}} \dots \sum_{v_{2l,1}, \dots, v_{2l,r}} T(\{\mathbf{b}, \mathbf{Y}\}),$$

$$T(\{\mathbf{b}, \mathbf{Y}\}) = \left| \sum_{u_1=1}^P \dots \sum_{u_r=1}^P \exp \left(2\pi i \sum_{\substack{s_1=0 \\ s_1+\dots+s_r \leq n_0}}^{n_0} \dots \sum_{s_r=0}^{n_0} b(s_1, \dots, s_r) Y(s_1, \dots, s_r) u_1^{s_1} \dots u_r^{s_r} \right) \right|,$$

где

$$Y(s_1, \dots, s_r) = v_{1,1}^{s_1} \dots v_{r,1}^{s_r} + \dots + v_{1,l}^{s_1} \dots v_{r,l}^{s_r} - v_{1,l+1}^{s_1} \dots v_{r,l+1}^{s_r} - \dots - v_{1,2l}^{s_1} \dots v_{r,2l}^{s_r},$$

$$0 \leq s_1, \dots, s_r, s_1 + \dots + s_r \leq n_0,$$

а символ $\{\mathbf{b}, \mathbf{Y}\}$ обозначает набор произведений чисел вида

$$\{b(s_1, \dots, s_r) Y(s_1, \dots, s_r)\}, 0 \leq s_1, \dots, s_r, s_1 + \dots + s_r \leq n_0.$$

Разобьем все точки \mathbf{Y} из \mathbf{R}^m на два класса. К первому классу E_1 отнесем те из них, для которых

$$|T(\mathbf{b}, \mathbf{Y})| \leq P^{r-\kappa}.$$

Остальные точки отнесем ко второму классу E_2 .

Тогда при $l = ml_0$ имеем

$$|W_1|^{2l} \leq P^{r(2l-1)} (\Sigma_1 + \Sigma_2) = W_{11} + W_{12},$$

$$\Sigma_1 = \sum_{\mathbf{Y} \in E_1} T(\mathbf{b}, \mathbf{Y}), \Sigma_2 = \sum_{\mathbf{Y} \in E_2} T(\mathbf{b}, \mathbf{Y}).$$

Оценим W_{11} . Количество наборов $\mathbf{Y} \in E_1$ не превосходит P^{2lr} . Следовательно,

$$W_{11} = P^{r(2l-1)} \Sigma_1 \leq P^{4lr-\kappa}.$$

Оценим теперь W_{12} . Сначала рассмотрим общую сумму вида

$$T(\mathbf{A}) = \left| \sum_{u_1=1}^P \dots \sum_{u_r=1}^P \exp(2\pi i H(\mathbf{u}, \mathbf{A})) \right|, \quad H(\mathbf{u}, \mathbf{A}) = \sum_{\substack{s_1=0 \\ s_1+\dots+s_r \leq n_0}}^{n_0} \dots \sum_{s_r=0}^{n_0} \alpha(s_1, \dots, s_r) u_1^{s_1} \dots u_r^{s_r},$$

где

$$\mathbf{A} = \{\alpha(s_1, \dots, s_r)\}, 0 \leq s_1, \dots, s_r, s_1 + \dots + s_r \leq n_0.$$

Заметим, что число координат вектора \mathbf{A} равно m :

$$m = \sum_{\substack{s_1=0 \\ s_1+\dots+s_r \leq n_0}}^{n_0} \dots \sum_{s_r=0}^{n_0} 1 = \binom{n_0 + r}{r}.$$

Пусть Π обозначает стандартный параллелепипед с длинами сторон

$$d(s_1, \dots, s_r) = (4\pi)^{-1} m^{-1} P^{-s_1-\dots-s_r-\kappa}$$

$$(0 \leq s_1, \dots, s_r, s_1 + \dots + s_r \leq n_0),$$

и пусть найдется точка \mathbf{A} из некоторого параллелепипеда Π , такая, что $|T(\mathbf{A})| > P^{r-\kappa}$. Тогда для любой точки $\mathbf{A}' \in \Pi$ справедлива оценка

$$|T(\mathbf{A}')| > 0,5P^{r-\kappa}.$$

Действительно, имеем

$$\begin{aligned} |T(\mathbf{A}') - T(\mathbf{A})| &\leq \sum_{u_1=1}^P \cdots \sum_{u_r=1}^P \left| 1 - e^{2\pi i(H(\mathbf{u}, \mathbf{A}) - H(\mathbf{u}, \mathbf{A}'))} \right| \leq \\ &\leq 2\pi \sum_{u_1=1}^P \cdots \sum_{u_r=1}^P \sum_{\substack{s_1=0 \\ s_1+\dots+s_r \leq n_0}}^{n_0} \cdots \sum_{\substack{s_r=0 \\ s_1+\dots+s_r \leq n_0}}^{n_0} |\alpha(s_1, \dots, s_r) - \alpha'(s_1, \dots, s_r)| u_1^{s_1} \dots u_r^{s_r} < 0,5P^{r-\kappa}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$|T(\mathbf{A}')| \geq |T(\mathbf{A})| - |T(\mathbf{A}) - T(\mathbf{A}')| > 0,5P^{r-\kappa}.$$

Далее разобьем единичный m -мерный куб Ω на малые параллелепипеды Π и оценим сверху число M тех из них, которые содержат хотя бы одну точку \mathbf{A} , такую, что $|T(\mathbf{A})| > P^{r-\kappa}$. Имеем неравенства

$$M\mu(\Pi)(0,5P^{r-\kappa})^{2l} < \int \cdots \int_{\Omega} |T(\mathbf{A})|^{2l} d\alpha \leq D(l_0)P^{2lr-\Delta(l_0)},$$

где $\mu(\Pi)$ — объем малого параллелепипеда Π :

$$\begin{aligned} \mu(\Pi) &= (4\pi m)^{-m} \prod_{\substack{s_1=0 \\ s_1+\dots+s_r \leq n_0}}^{n_0} \cdots \prod_{\substack{s_r=0 \\ s_1+\dots+s_r \leq n_0}}^{n_0} P^{-(s_1+\dots+s_r)} = (4\pi m)^{-m} P^{-m_0}, \\ m_0 &= \sum_{\substack{s_1=0 \\ s_1+\dots+s_r \leq n_0}}^{n_0} \cdots \sum_{\substack{s_r=0 \\ s_1+\dots+s_r \leq n_0}}^{n_0} (s_1 + \dots + s_r) = \sum_{s=1}^{n_0} s \sum_{\substack{s_1=0 \\ s_1+\dots+s_r=s}}^{n_0} \cdots \sum_{\substack{s_r=0 \\ s_1+\dots+s_r=s}}^{n_0} 1 = \binom{n_0+r}{r+1}. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$M < (4\pi m)^m 2^{2l} D(l) P^{2r\kappa+m_0(1-1/n_0)l_0}.$$

Итак, для набора $\mathbf{Y} \in E_2$ справедливы неравенства

$$P^{r-\kappa} < |T(\{\mathbf{b}, \mathbf{Y}\})| \leq P^r,$$

и координаты

$$Y(s_1, \dots, s_r), 0 \leq s_1, \dots, s_r, s_1 + \dots + s_r \leq n_0,$$

вектора \mathbf{Y} принимают целые значения $z(s_1, \dots, s_r)$, удовлетворяющие условиям

$$|z(s_1, \dots, s_r)| < lP^{s_1+\dots+s_r}.$$

Для любого фиксированного набора

$$z(s_1, \dots, s_r), 0 \leq s_1, \dots, s_r, s_1 + \dots + s_r \leq n_0,$$

число решений системы уравнений

$$Y(s_1, \dots, s_r) = z(s_1, \dots, s_r), 0 \leq s_1, \dots, s_r, s_1 + \dots + s_r \leq n_0,$$

не превосходит величины (лемма)

$$V = D(l_0)P^{2lr-\Delta(l_0)},$$

где

$$\Delta(l_0) = r \binom{n_0+r}{r+1} - r \binom{n_0+r}{r+1} (1-1/n_0)^{l_0}, \quad D(l_0) = k^{2ml} 4^{mr^2 n_0 l} (n_0 r)^{2n_0 r \Delta(l_0)}.$$

Оценим сверху число I точек

$$\{\mathbf{b}, \mathbf{Y}\} = \{b(s_1, \dots, s_r)z(s_1, \dots, s_r), 0 \leq s_1, \dots, s_r, s_1 + \dots + s_r \leq n_0,$$

попадающих в заданный малый параллелепипед Π с длинами сторон

$$d(s_1, \dots, s_r) = (4\pi m)^{-1} P^{-s_1 - \dots - s_r - \kappa}, 0 \leq s_1, \dots, s_r, s_1 + \dots + s_r \leq n_0.$$

Оценку будем производить по координатам. Для этого координаты $\{b(\mathbf{s})z(\mathbf{s})\}$ точки \mathbf{b}, \mathbf{z} разобьем на три совокупности. В первую совокупность войдут те координаты, номера которых удовлетворяют условиям $\frac{3}{2}(n-r) < s_1 + \dots + s_r \leq 3(n-r)$; во вторую совокупность — те, для которых $n < s_1 + \dots + s_r \leq \frac{3}{2}(n-r) - 2$; и в третью совокупность отнесем все оставшиеся координаты.

Для первой совокупности находим

$$|b(s_1, \dots, s_r)z(s_1, \dots, s_r)| \leq \frac{|t|}{2\pi M_1 \dots M_r M_1^{s_1 + \dots + s_r}} l P^{s_1 + \dots + s_r} < 1/2.$$

Следовательно, для координаты с номером (s_1, \dots, s_r) точки $\{\mathbf{b}, \mathbf{z}\}$ при некотором B , отвечающем заданному малому параллелепипеду Π , имеем

$$B < b(s_1, \dots, s_r)z(s_1, \dots, s_r) \leq B + d(s_1, \dots, s_r),$$

т.е.

$$B/b(s_1, \dots, s_r) < z(s_1, \dots, s_r) \leq (B + d(s_1, \dots, s_r))/b(s_1, \dots, s_r).$$

Так как $z(s_1, \dots, s_r)$ — целое число, то количество значений координаты $b(s_1, \dots, s_r)z(s_1, \dots, s_r)$, попавших в промежуток длиной $d(s_1, \dots, s_r)$, не превосходит

$$d(s_1, \dots, s_r)b^{-1}(s_1, \dots, s_r) + 1 \leq (2m)^{-1} P^{-(s_1 + \dots + s_r) - \kappa} M_1^{s_1 + \dots + s_r + r - n + 1}.$$

Перейдем к оценке числа элементов второй совокупности. Поскольку для любого набора (s_1, \dots, s_r) из второй совокупности справедливы неравенства

$$|z(s_1, \dots, s_r)| \leq l P^{s_1 + \dots + s_r}, d(s_1, \dots, s_r) \leq |b(s_1, \dots, s_r)| \leq \frac{|t|}{2\pi M_1 \dots M_r M_1^{r(s_1 + \dots + s_r)}},$$

для значений координат точки $\{\mathbf{b}, \mathbf{Y}\}$ получим

$$|b(s_1, \dots, s_r)z(s_1, \dots, s_r)| \leq \frac{|t|}{2\pi M_1 \dots M_r M_1^{s_1 + \dots + s_r}} l P^{s_1 + \dots + s_r} \leq \frac{l|t|P^{s_1 + \dots + s_r}}{2\pi M_1 \dots M_r M_1^{s_1 + \dots + s_r}}.$$

Для любого набора (s_1, \dots, s_r) из третьей совокупности число элементов $b(s_1, \dots, s_r)z(s_1, \dots, s_r)$, попавших в промежуток длины $d(s_1, \dots, s_r)$, тривиально не превосходит величины $2lP^{s_1 + \dots + s_r}$.

Отсюда находим, что общее число I точек $\{\mathbf{b}, \mathbf{Y}\}$, попавших в заданный малый параллелепипед Π , не превосходит $I \leq (2l)^m P^{m_0} \Pi_1 \Pi_2$, где

$$\Pi_1 = \prod_{n < s_1 + \dots + s_r \leq \frac{3}{2}(n-r) - 2} \frac{|t|}{4\pi M_1 \dots M_r M_1^{s_1 + \dots + s_r}},$$

$$\Pi_2 = \prod_{\frac{3}{2}(n-r) < s_1 + \dots + s_r \leq 3(n-r)} (2m)^{-1} P^{-(s_1 + \dots + s_r) - \kappa} M_1^{s_1 + \dots + s_r + r + 1} |t|^{-1}.$$

Оценим теперь величины Π_1 и Π_2 . Имеем

$$\Pi_1 \leq (|t| M_1^{-r})^{m([1,5(n-r)-2] - m(n))} M_1^{m_0([1,5(n-r)] - 2) - m_0(n)} = P^{\Delta_1},$$

$$\Pi_2 \leq (M_1^r |t|^{-1} P^{-\kappa})^{m(3(n-r)) - m([1,5(n-r)])} (M_1 P^{-2})^{m_0(3(n-r)) - m_0([1,5(n-r)])} = P^{\Delta_2},$$

где $m(n) = \binom{n+r}{r}$ и $m_0(n) = r \binom{n+r}{r+1}$.

Далее получим

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 3(n-r) \left(\binom{[1, 5(n-r)] + r - 2}{r} - \binom{n+r}{r} \right) - \\ &\quad - 3r \left(\binom{[1, 5(n-r)] + r - 2}{r} - \binom{n+r}{r} \right), \\ \Delta_2 &= (3r - 3n + 3 - \kappa) \left(\binom{3(n-r) + r}{r} - \binom{[1, 5(n-r)] + r}{r} \right) + \\ &\quad + r \left(\binom{3(n-r) + r}{r+1} - \binom{[1, 5(n-r)] + r}{r+1} \right). \end{aligned}$$

Наконец, находим

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \binom{[1, 5(n-r)] + r - 2}{r} \left(3(n-r) - \frac{r}{r+1}([1, 5(n-r)] - 2) \right) + \\ &\quad + \binom{n+r}{r} \left(\frac{r(n-1)}{r+1} - 3(n-r) \right) \leq [1, 5(n-r)] \binom{[1, 5(n-r)] + r - 2}{r}, \\ \Delta_2 &= \binom{3(n-r) + r}{r} \left(\frac{3r(n-r)}{r+1} - 3(n-r) + 3 - \kappa \right) + \\ &\quad + \binom{[1, 5(n-r)] + r}{r} \left(\frac{r[1, 5(n-r)]}{r+1} - [1, 5(n-r)] + 3 - \kappa \right) \geq -\frac{3(n-r)}{2(r+1)} \binom{3n-2r}{r}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$I \leq (2l)^m P^{m_0} P^{-\frac{(n-r)}{2(r+1)}(3n-2r)}.$$

Таким образом,

$$W_{12} \leq P^{r(2l-1)} \Sigma_2 \leq VIMP^{2lr} \leq (4\pi m)^n 2^{2l} (2l)^m D^2(l_0) P^{4lr - \Delta_0},$$

где

$$\Delta_0 = \frac{(n-r)}{(r+1)} \binom{3n-2r}{r} - 2r\kappa - 2m_0 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{l_0}, \quad \frac{(n-r)}{(r+1)} \binom{3n-2r}{r} = \frac{1}{3} \binom{3n-2r}{r+1}.$$

Покажем, что $\Delta_0 \geq 4l\kappa$. Имеем

$$\frac{1}{6} \binom{3n-2r}{r+1} \geq 8ml_0\kappa, \quad m_0 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{l_0} \leq ml_0\kappa, \quad r\kappa \leq ml_0\kappa.$$

Собирая вместе найденные выше оценки W_{11} и W_{12} , получим утверждение теоремы 1.

4. Доказательство теоремы 2. Пусть $r \geq 1, l \neq 0$ — произвольные натуральные числа, $1 < M_1 \leq M_2 \leq \dots \leq M_r \leq 2M_1$. Рассмотрим тригонометрическую сумму вида

$$T = \sum_{m_1=M_1}^{M'_1} \dots \sum_{m_r=M_r}^{M'_r} e^{2\pi i t \ln(m_1 \dots m_r + l)}.$$

В сумме T произведем сдвиг промежутков суммирования на $u_s v_s, 1 \leq s \leq r$, а затем по этим переменным просуммируем в пределах от 1 до $P = [M_1^{1/3}]$. Получим

$$T = P^{-2r} W + 2r\theta P^2 M_2 \dots M_r, \quad |\theta| \leq 1,$$

$$W = \sum_{u_1, v_1=1}^P \dots \sum_{u_r, v_r=1}^P \sum_{m_1=M_1}^{M'_1} \dots \sum_{m_r=M_r}^{M'_r} e^{2\pi i t \ln((m_1 - u_1 v_1) \dots (m_r - u_r v_r) + l)} = \sum_{\mathbf{m}} W(\mathbf{m}).$$

Положим $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r), x_s = u_s v_s m_s^{-1}, 1 \leq s \leq r$. Имеем

$$\begin{aligned} & \ln((m_1 - m_1 x_1) \dots (m_r - m_r x_r) + l) - \ln(m_1 \dots m_r + l) = \\ & = \ln\left((1 - x_1) \dots (1 - x_r) + \frac{l}{m_1 \dots m_r}\right) - \ln\left(1 + \frac{l}{m_1 \dots m_r}\right) = F(x_1, \dots, x_r) = F(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Далее разложим функцию $F(\mathbf{x})$ по формуле Тейлора до члена с номером $n_0 = 3n$ с остатком в форме Лагранжа. При некотором $0 < \theta_1 < 1$ получим

$$F(x_1, \dots, x_r) = \Phi(x_1, \dots, x_r) + \Upsilon(x_1, \dots, x_r),$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(x_1, \dots, x_r) &= \sum_{\nu=1}^{n_0} \frac{1}{\nu!} d_{\mathbf{h}}^{\nu} F(0, \dots, 0) \Big|_{\mathbf{h}=\mathbf{x}} = \sum_{\substack{s_1=0 \\ \dots \\ s_r=0 \\ s_1+\dots+s_r \leq n_0}}^{n_0} \dots \sum_{s_r=0}^{n_0} \beta(s_1, \dots, s_r) x_1^{s_1} \dots x_r^{s_r}. \\ \Upsilon(\mathbf{x}) &= \frac{1}{(n_0 + 1)!} d_{\mathbf{h}}^{n_0+1} F(-\theta_1 x_1, \dots, -\theta_1 x_r) \Big|_{\mathbf{h}=\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$W(\mathbf{m}) = W_1 + R,$$

где

$$\begin{aligned} W_1 &= \sum_{u_1=1}^P \sum_{v_1=1}^P \dots \sum_{u_r=1}^P \sum_{v_r=1}^P \exp\left(2\pi i t \Phi\left(\frac{u_1 v_1}{m_1}, \dots, \frac{u_r v_r}{m_r}\right)\right) = \\ &= \sum_{u_1, \dots, u_r=1}^P \sum_{v_1, \dots, v_r=1}^P \exp 2\pi i t G_{\mathbf{m}}(u_1 v_1, \dots, u_r v_r), \end{aligned}$$

причем

$$\begin{aligned} G_{\mathbf{m}}(u_1 v_1, \dots, u_r v_r) &= \sum_{\substack{s_1=0 \\ \dots \\ s_r=0 \\ 1 \leq s_1+\dots+s_r \leq n_0}}^{n_0} \dots \sum_{s_r=0}^{n_0} \beta(s_1, \dots, s_r) (u_1 v_1)^{s_1} \dots (u_r v_r)^{s_r}, \\ \beta(s_1, \dots, s_r) &= \frac{1}{\bar{s}_1 \dots \bar{s}_r (m_1)^{s_1} \dots (m_r)^{s_r}} \left(\frac{1}{1 + \omega}\right)^{s_1+\dots+s_r}, \omega = \frac{l}{m_1 \dots m_r}, \bar{s} = \max(1; s), \\ & 0 \leq s_1, \dots, s_r, 1 \leq s_1 + \dots + s_r \leq n_0. \end{aligned}$$

Оценим остаток R . Имеем

$$\begin{aligned} |R| &\leq \sum_{u_1, v_1, \dots, u_r, v_r=1}^P \left| 1 - \exp\left(2\pi i t \Upsilon\left(\frac{u_1 v_1}{m_1}, \dots, \frac{u_r v_r}{m_r}\right)\right) \right| \leq \\ &\leq 2\pi |t| \sum_{u_1, v_1, \dots, u_r, v_r=1}^P \left| \Upsilon\left(\frac{u_1 v_1}{m_1}, \dots, \frac{u_r v_r}{m_r}\right) \right| \leq \\ &\leq 2\pi \sum_{u_1, v_1, \dots, u_r, v_r=1}^P \left| \frac{t}{m_1 \dots m_r} \right| \cdot \left| \frac{1}{(n_0 + 1)!} d_{\mathbf{h}}^{n_0+1} F\left(-\theta_1 \frac{u_1 v_1}{m_1}, \dots, -\theta_1 \frac{u_r v_r}{m_r}\right) \Big|_{\mathbf{h}=\mathbf{w}} \right| = R_1, \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{w} = \left(\frac{u_1 v_1}{m_1}, \dots, \frac{u_r v_r}{m_r}\right).$$

Далее находим

$$|R_1| \leq 2\pi 2^{n_0+1} |t| \sum_{u_1, v_1, \dots, u_r, v_r=1}^P \sum_{\substack{s_1=0 \\ \dots \\ s_r=0 \\ s_1+\dots+s_r=n_0+1}}^{n_0+1} \dots \sum_{s_r=0}^{n_0+1} \frac{P^{2s_1}}{M_1^{s_1}} \dots \frac{P^{2s_r}}{M_r^{s_r}} \leq$$

$$\leq 2^{n_0+4} \binom{n_0+r}{r-1} P^{2(n_0+r+1)} |t| \frac{1}{M_1^{n_0+1}} \leq 2^{n_0+4} \binom{n_0+r}{r-1} P^n \left(\frac{P^2}{M_1} \right)^{n_0+r+1}.$$

Преобразуем сумму W_1 :

$$W_1 = \sum_{u_1, \dots, u_r=1}^P \sum_{v_1, \dots, v_r=1}^P \exp(2\pi i t G_{\mathbf{m}}(u_1 v_1, \dots, u_r v_r)),$$

Используя неравенство Гёльдера, получим

$$|W_1|^{2k} \leq P^{r(2k-1)} W_2,$$

$$W_2 = \sum_{u_1=1}^P \dots \sum_{u_r=1}^P \left| \sum_{v_1=1}^P \dots \sum_{v_r=1}^P e^{2\pi i t G_{\mathbf{m}}(u_1 v_1, \dots, u_r v_r)} \right|^{2k}.$$

Далее будем иметь

$$W_2 \leq \sum_{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{2k}} \left| \sum_{u_1, \dots, u_r=1}^P e^{2\pi i t (G_{\mathbf{m}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1) - \dots - G_{\mathbf{m}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}_{2k}))} \right| =$$

$$= \sum_{\Lambda} J(P; r, n, k, \Lambda) \left| \sum_{u_1, \dots, u_r=1}^P e^{2\pi i G_{\mathbf{m}}(\mathbf{u}, \Lambda)} \right| = W_3,$$

$$G_{\mathbf{m}}(\mathbf{u}, \Lambda) = \sum_{s_1=0}^{n_0} \dots \sum_{s_r=0}^{n_0} \beta(s_1, \dots, s_r) u_1^{s_1} \dots u_r^{s_r} \lambda(s_1, \dots, s_r),$$

$$\lambda(s_1, \dots, s_r) = \sum_{j=1}^{2k} (-1)^j v_{1,j}^{s_1} \dots v_{r,j}^{s_r}, 0 \leq s_1, \dots, s_r, 1 \leq s_1 + \dots + s_r \leq n_0.$$

Вновь используя неравенство Гёльдера, приходим к оценке

$$\begin{aligned} |W_3|^{2k} &\leq \left(\sum_{\Lambda} J(P; r, n, k, \Lambda) \right)^{2k-1} \sum_{\Lambda} J(P; r, n, k, \Lambda) \left| \sum_{u_1, \dots, u_r=1}^P e^{2\pi i G_{\mathbf{m}}(\mathbf{u}, \Lambda)} \right|^{2k} \leq \\ &\leq P^{2kr(2k-1)} J(P; r, n, k) \sum_{\Lambda} \left| \sum_{u_1, \dots, u_r=1}^P e^{2\pi i G_{\mathbf{m}}(\mathbf{u}, \Lambda)} \right|^{2k} = P^{2kr(2k-1)} J(P; r, n, k) W_4. \end{aligned}$$

Собирая вместе соответствующие слагаемые в W_3 , получим

$$W_4 \leq J(P; r, n, k) \sum_M \left| \sum_{\Lambda} e^{2\pi i G_{\mathbf{m}}(M, \Lambda)} \right| = J(P; r, n, k) W_5,$$

$$G_{\mathbf{m}}(M, \Lambda) = \sum_{\substack{s_1=0 \\ 1 \leq s_1 + \dots + s_r \leq n_0}}^{n_0} \dots \sum_{s_r=0}^{n_0} \beta(s_1, \dots, s_r) \lambda(s_1, \dots, s_r) \mu(s_1, \dots, s_r).$$

Оценим W_5 . Суммируя прогрессии по Λ , находим ($\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_r)$)

$$W_5 \leq \prod_{\substack{s_1, \dots, s_r \geq 0 \\ 1 \leq s_1 + \dots + s_r \leq n_0}} \sum_{|\mu(s_1, \dots, s_r)| < k P^{s_1 + \dots + s_r}} \min \left(2k_1 P^{s_1 + \dots + s_r}, \frac{1}{2 \|\beta(\mathbf{s}) \mu(\mathbf{s})\|} \right) = W_6.$$

Далее воспользуемся следующим простым утверждением.

Утверждение. Пусть $\beta = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, q \geq 1, (a, q) = 1, |\theta| \leq 1$. Тогда при любом γ и $U > 0, Q \geq 1$ имеем

$$\sum_{x=1}^Q \min \left(U, \frac{1}{\|\beta x + \gamma\|} \right) \leq 6 \left(\frac{Q}{q} + 1 \right) (U + q \ln q),$$

где $\|\alpha\|$ обозначает расстояние от числа α до ближайшего целого.

Для этого при $0, 5n_0 \leq s_1 + \dots + s_r \leq n_0 - 4$ представим $\beta(\mathbf{s}) = \beta(s_1, \dots, s_r)$ в виде

$$\beta(\mathbf{s}) = \frac{a(\mathbf{s})}{q(\mathbf{s})} + \frac{\theta(\mathbf{s})}{q(\mathbf{s})^2}, (a(\mathbf{s}), q(\mathbf{s})) = 1, |\theta(\mathbf{s})| \leq 1,$$

где $a(\mathbf{s}) = 1, q(\mathbf{s}) = [\bar{s}_1 \dots \bar{s}_r (1 + \omega)^{s_1 + \dots + s_r} m_1^{s_1} \dots m_r^{s_r} |t|^{-1}]$.

Получим

$$\begin{aligned} & \sum_{|\mu(s_1, \dots, s_r)| < k P^{s_1 + \dots + s_r}} \min \left(2k_1 P^{s_1 + \dots + s_r}, \frac{1}{2\|\beta(\mathbf{s})\mu(\mathbf{s})\|} \right) \leq \\ & \leq 6 \left(\frac{2k P^{s_1 + \dots + s_r}}{q(\mathbf{s})} + 1 \right) (2k P^{s_1 + \dots + s_r} + q(\mathbf{s}) \ln q(\mathbf{s})) \leq \\ & \leq 24k^2 P^{2(s_1 + \dots + s_r)} \left(\frac{1}{q(\mathbf{s})} + \frac{1}{P^{s_1 + \dots + s_r}} + \frac{q(\mathbf{s})}{P^{2(s_1 + \dots + s_r)}} \right) \ln q(\mathbf{s}). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$W_6 \leq (24k^2)^m P^{2m_1} \prod_{\substack{s_1, \dots, s_r \geq 0 \\ 0, 5n_0 \leq s_1 + \dots + s_r \leq n_0 - 4}} \left(\frac{1}{q(\mathbf{s})} + \frac{1}{P^{s_1 + \dots + s_r}} + \frac{q(\mathbf{s})}{P^{2(s_1 + \dots + s_r)}} \right) (\ln(q(\mathbf{s})))^m.$$

Далее, выбирая $k = 12m_0 = ml_0$ и применяя лемму, приходим к оценке

$$|S| \ll M_1 \dots M_r M_1^{1-\rho}, \rho = \frac{\gamma}{m_0},$$

где $\gamma > 0$ — некоторая постоянная. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов И.М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. 2-е изд., исправленное и дополненное. М.: Физматлит, 1980.
2. Виноградов И.М. Новая оценка функции $\zeta(1+it)$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1958. **22**, № 2. 161–164.
3. Виноградов И.М. К вопросу об оценке тригонометрических сумм // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1965. **29**, № 3. 493–504.
4. Коробов Н.М. Оценки тригонометрических сумм и их приложения // Успехи матем. наук. 1958. **13**, № 4. 185–192.
5. Walfisz A. Weylsche Exponentialsummen in der Neueren Zahlentheorie. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1963.
6. Архипов Г.И., Карацуба А.А., Чубариков В.Н. Теория кратных тригонометрических сумм. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.
7. Чубариков В.Н. Кратные тригонометрические суммы с простыми числами // Докл. АН СССР. 1984. **278**, № 2. 302–304.
8. Чубариков В.Н. Оценки кратных тригонометрических сумм с простыми числами // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1985. **49**, № 5. 1031–1067.
9. Чубариков В.Н. Об одной теореме о среднем значении кратных тригонометрических сумм // Чебышёвский сборник. 2020. **20**, № 1. 305–319.

Поступила в редакцию
27.12.2019

УДК 519.95

ЗАМЕЧАНИЕ О БЫСТРОМ ВЫЧИСЛЕНИИ ТРАНЗИТИВНОГО ЗАМЫКАНИЯ ГРАФОВ И УМНОЖЕНИИ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ МАТРИЦ

С. Б. Гашков¹

Сравниваются нескольких алгоритмов вычисления транзитивного замыкания графа и умножения матриц в булевом полукольце и кольцах вычетов. Приведены оценки сложности и глубины соответствующих булевых схем.

Ключевые слова: транзитивное замыкание графа, булево умножение матриц, умножение матриц над кольцами, битовая сложность, булевы схемы, их сложность и глубина, модулярные сложение и умножение.

Some algorithms for transitive closure and Boolean matrix multiplication are compared. The bounds for size and depth of corresponding boolean circuits are given.

Key words: transitive closure of graph, boolean matrix multiplication, matrix multiplication over rings, bit complexity, boolean circuits, size and depth, modular addition and multiplication.

1. Введение. Для нахождения транзитивного замыкания n -вершинного орграфа G известен алгоритм Роя–Уоршалла (RW) [1, 2], вычисляющий по матрице X смежности вершин орграфа G матрицу X^* транзитивного замыкания G^* этого орграфа. Его битовая сложность асимптотически равна $2n^3$, а сам алгоритм можно реализовать булевой схемой RW указанной выше сложности с $n^2 - n$ входами и $n^2 - n$ выходами, состоящей из элементов $\&$, \vee . Глубина этой схемы равна $2n$.

Известно, что для вычисления матрицы X^* можно использовать булево умножение матриц [3–5]. Заменим в X диагональные элементы на единицы. Тогда $X^* = X^{n-1} = X^m$, $m \geq n$. При $2^{k-1} + 1 < n \leq 2^k$ положим $m = 2^k$, а при $n = 2^k + 1$ положим $m = 2^k$. Далее для краткости вместо $\lceil \log_2 n \rceil$ везде пишем $\lambda(n)$ (это число битов в двоичной записи n), а символ \sim означает асимптотическое равенство.

Чтобы вычислить матрицу X^m , достаточно $k = \lambda(n - 1)$ матричных возведений в квадрат. Это вычисление реализуется монотонной булевой схемой сложности и глубины соответственно $T(n) \leq n^2(2n - 1)\lambda(n - 1)$ и $t(n) = (\lambda(n - 1))^2$. Оценка глубины напоминает алгоритм Савича [6] для транзитивного замыкания. Его сложность, равная $n^{O(\lambda(n))}$, совпадает со сложностью формулы, в которую можно преобразовать указанную выше схему с сохранением глубины. Можно и непосредственно преобразовать RW-алгоритм в $n^2 - n$ формул в базе $\{\&, \vee\}$, а именно в $n^2 - n$ дизъюнктивных нормальных форм, состоящих каждая из $(n - 1)!$ конъюнкций ранга n , глубина этой формулы больше глубины схемы RW.

Для отыскания булева квадрата матрицы X можно вычислить X^2 , выполняя операции в кольце \mathbb{Z}_s , $s \geq n + 1$, а потом в матрице X^2 не равные нулю элементы заменить на единицы [4, 5]. Если вычисление X^2 реализовано схемой глубины $D(n)$ из $A(n)$ аддитивных операций и $M(n)$ умножений в кольце \mathbb{Z}_s , сложение-вычитание \mathbb{Z}_s реализовано булевой схемой сложности $a(s)$ и глубины $d(s) = O(\lambda(s))$ в базе $\{\&, \oplus\}$, а умножение — схемой сложности $m(s)$ и глубины $O(\lambda(s))$, то вычисление X^* по данной матрице X реализуется булевой схемой сложности $T(n) = (A(n)a(s) + M(n)m(s))k$ и глубины $t(n) = k((D(n) - 1)d(s) + O(\lambda(q)))$. При применении алгоритма Штрассена [7] умножения матриц в модификации Винограда (см. [5]) и $s = 2^q$, $s/2 \leq n < s$, оценок $a(s) \leq 5(q - 1)$, $m(s) \leq 3(q - 1)^2 - 2(q - 1) + 3$, $d(s) \sim \lambda(q)$, $D(n) \leq 5\lambda(q)$ для арифметических операций в кольце \mathbb{Z}_s получается схема сложности и глубины соответственно $T(n) \leq O(n^{\log_2 7})(\lambda(n))^3$ и $t(n) \sim 5(\lambda(n))^2 \lambda(\lambda(n))$. При использовании алгоритма [7] глубина $D(n) \leq 3\lambda(n)$, но сложность возрастает.

В случае $n = 2^k$, как известно, $A(n) = 5(7^k - 4^k)$, $M(n) = 7^k$, следовательно, $T(n) \sim 3(\lambda(n))^3 n^{\log_2 7}$. В сравнении с асимптотикой $2n^3$ сложности RW-алгоритма эта оценка лучше при $n \geq 2^{110} > 10^{33}$. Глубина меньше глубины схемы RW при $n > 2^{12} > 4000$.

¹Гашков Сергей Борисович — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. дискретной математики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: sbgashkov@gmail.com.

Gashkov Sergei Borisovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Discrete Mathematics.

В [5] показано, что сложность вычисления матрицы X^* по порядку равна сложности булева умножения матриц, и получена рекуррентная оценка

$$T(n) \leq 2T(\lceil n/2 \rceil) + cM(\lceil n/2 \rceil) + bn^2, \quad T(2) = 0, \quad c = 6, b = 1/2,$$

для алгоритма вычисления X^* , использующего метод “деления пополам”:

$$\text{если } X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \text{ то } X^* = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}, \text{ где}$$

$$E = (A \vee B \times D^* \times C)^*, F = E \times B \times D^*, G = D^* \times C \times E, H = D^* \vee D^* \times CEB \times D^*.$$

Из нее в случае булева умножения матриц со сложностью $M(n) = n^\omega(\lambda(n))^{O(1)}$ получается при $n = 2^k$ монотонная схема сложности $T(n) \leq \frac{6}{2^\omega - 1}M(n) + O(n^2)$ и глубины $t(n) = O(n\lambda(n)\lambda(\lambda(n)))$.

Согласно [8] вычисление матрицы X^* можно со сложностью $O(n^2)$ свести к вычислению X^* для орграфа с верхнетреугольной матрицей смежности X (вычисляются компоненты сильной связности, каждая из них заменяется на одну вершину, получается ациклический орграф, матрица которого становится верхнетреугольной после выполнения топологической сортировки). В случае верхнетреугольной матрицы X рекуррентная формула вычисления X^* упрощается [5]:

$$X^* = \begin{pmatrix} A^* A^* \times B \times D^* \\ 0 & D^* \end{pmatrix}.$$

Рекуррентная оценка сложности имеет вид $T(n) \leq 2T(n/2) + 2M(n/2)$, откуда

$$T(n) \leq \frac{1}{3}M(n), \quad t(n) \leq 3(\lambda(n))^2\lambda(\lambda(n)) + O((\lambda(n))^2)$$

в случае использования алгоритма [7]. Известно, что монотонная сложность булева умножения матриц по порядку равна n^3 , и такой же порядок имеет монотонная сложность умножения действительных матриц.

2. О быстром умножении булевых матриц. Выберем попарно взаимно простые числа p_i так, что $p_1 \dots p_{s-1} \leq n < p_1 \dots p_s = P_s$, и любое число $a \in [0, P_s - 1]$ представим в виде набора (a_1, \dots, a_s) остатков по модулям p_i . Как известно, это можно сделать с битовой сложностью $O(\lambda(s)m(\lambda(P_s)))$, где $m(q)$ — битовая сложность умножения q -битных чисел [5]. Для булева умножения матриц A и B порядка n используем их умножение над кольцом вычетов \mathbb{Z}_{P_s} . Согласно китайской теореме об остатках, кольцо \mathbb{Z}_{P_s} изоморфно произведению колец \mathbb{Z}_{p_i} . Операции в кольце \mathbb{Z}_{P_s} сводятся к параллельному выполнению операций в кольцах \mathbb{Z}_{p_i} , если предварительно преобразовать сомножители a, b в указанные наборы $(a_1, \dots, a_s), (b_1, \dots, b_s)$, тогда в результате операции над a, b получается набор (c_1, \dots, c_s) . Все вычисления, необходимые для умножения матриц над кольцом \mathbb{Z}_{P_s} , можно провести параллельно, фактически выполняя умножение данных матриц над каждым кольцом \mathbb{Z}_{p_i} , и только после их окончания преобразовать результирующую матрицу C , составленную из наборов вида (c_1, \dots, c_s) , $c_i \in \mathbb{Z}_{p_i}$, в матрицу над кольцом \mathbb{Z}_{P_s} . На самом деле для преобразования ее в булеву матрицу достаточно для каждой компоненты c_i каждого элемента (c_1, \dots, c_s) матрицы C выяснить, равен ли он нулю, и в случае равенства нулю всех компонент заменить этот элемент на нуль, а в противном случае — на единицу. Битовая сложность этих вычислений равна $O(n^2\lambda(P_s))$. Если обозначить через $M(n)$ алгебраическую сложность умножения матриц над произвольным кольцом (т.е. число операций в этом кольце), то сложность булева умножения матриц оценивается как

$$M(n) \sum_{i=1}^s O(m(\lambda(p_i))) + O(n^2\lambda(s)m(\lambda(P_s))).$$

Согласно асимптотическому закону распределения простых чисел можно выбрать простые p_i так, что $\ln P_s = \Theta(s \ln s)$, $s \sim \ln n / \ln \ln n$, $s \ln s \sim \ln n$, $p_s \sim s \ln s \sim \ln n$, $\lambda(p_s) = \lambda(\lambda(n)) + O(1)$, откуда (в предположении, что $m(n)/n \rightarrow \infty$) имеем асимптотическое равенство

$$M(n)m(\lambda(p_s))s \sim M(n)(\ln n / \ln \ln n)m(\lambda(\lambda(n))).$$

Если воспользоваться известными оценками сложности матричного умножения $M(n) = O(n^\omega)$, где $\omega < 2,4$ — экспонента матричного умножения, и сложности умножения n -битных чисел $m(n) = O(n \log_2 n)$, то сложность булева умножения матриц будет равна $O(n^\omega \lambda(n) \lambda(\lambda(\lambda(n))))$. Так как согласно [9] глубина схемы сложения n -битных чисел равна $d(n) = \lambda(n) + \lambda(\lambda(n)) + O(1)$, то при применении алгоритма Штрассена [7] сложность схемы умножения булевых матриц равна $O(n^{\log_2 7} \lambda(n) \lambda(\lambda(\lambda(n))))$, а глубина не больше $(3\lambda(n) - 6)(\lambda(\lambda(n)) + \lambda(\lambda(\lambda(n)))) + O(1) + 5\lambda(n)$. Использовать алгоритмы для умножения матриц, более быстрые, чем алгоритм [7], затруднительно, поскольку мультипликативные константы в оценках их сложности слишком велики.

В случае верхнетреугольной матрицы X подматрицы A и D также являются верхнетреугольными, как и матрицы A^*, D^* . Вместо $M(n)$ можно использовать оценку $S(n)$ сложности умножения обычной матрицы на верхнетреугольную. Для нее получаются следующие оценки числа сложений и умножений:

$$S_a(n) \leq 4S_a(n/2) + 2A(n/2) + n^2, \quad S_m(n) \leq 4S_m(n/2) + 2M(n/2),$$

откуда при $n < 2^k$ будем иметь

$$T(n) < \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} 7^k 3(k^2 - 2k + 3) + \frac{10}{3} 7^k 5(k - 1) \right).$$

Сравнивая эту оценку со сложностью RW-схемы $W(2^k) \sim 2 \cdot 8k$, получаем, что $T(2^k) < W(2^k)$ при $k \geq 49$.

Некоторого ускорения можно добиться, используя для булева умножения матриц порядка $n < 2^{32}$ вместо кольца вычетов $\mathbb{Z}_{2^{32}}$ кольцо $\mathbb{Z}_{512} \times \mathbb{Z}_{243} \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{49} \times \mathbb{Z}_{31} \times \mathbb{Z}_{17}$. Битовая сложность операции сложения в нем оценивается сверху как

$$5 \cdot 8 + 24 \cdot 4 + 27 + 39 + 9 \cdot 4 + 5 + 7 \cdot 5 - 3 = 275,$$

а сложность умножения — как

$$3(8^2 + 2) + (13,5 \cdot 4^2 - 34,5 \cdot 4) + 31 + 27 + 108 + (6 \cdot 4^2 + 7 \cdot 4 - 9) + (6 \cdot 5^2 - 5 - 3) = 705.$$

Для получения этих оценок пользуемся тем, что $A(2^n + 1) \leq 9n + 5$, $M(2^n + 1) \leq 6n^2 + 7n - 9$, $A(2^n - 1) \leq 7n - 3$, $M(2^n - 1) \leq 6n^2 - n - 3$, $A(3^n) \leq 24(n - 1)$, $M(3^n) \leq 13,5n^2 - 34,5n + 31$, $A(7) \leq 17$, $M(7) \leq 17$, $M(7^2) \leq 108$, $A(7^n) \leq 22n - 5$, где $A(n)$ и $M(n)$ — битовые сложности операций сложения и умножения по модулю n . Если начать применение алгоритма Штрассена–Винограда с матриц порядка 8, то при $n < 2^{32}$ будем иметь оценку $T(n) < 371 \cdot 7^{32} < 4,1 \cdot 10^{29}$, однако $W(n) < 1,59 \cdot 10^{29}$.

2.1. Булево умножение матриц на RAM-машине. Если использовать для умножения матриц над кольцом \mathbb{Z}_p не булевы схемы, а программы для машин с произвольным доступом к памяти (RAM-машин), то любой алгоритм алгебраической сложности $O(n^\omega)$ можно превратить в алгоритм битовой сложности

$$\frac{O(n^\omega)}{\log_p^{\omega-2} n}.$$

Для этого разобьем матрицу порядка n на подматрицы порядка $k = (\omega - 2) \log_p n - \omega \log_p \log_p n$ (если n не кратно k , дополним ее нулями). Используя указанное блочное представление матриц, можно их перемножить, выполнив $O(n/k)^\omega$ сложений и умножений подматриц порядка k . Битовая сложность сложения матриц порядка k над кольцом \mathbb{Z}_p равна $O(k^2 \lambda(p))$. Для умножения матриц порядка k достаточно выполнить k^2 операций вычисления скалярного произведения векторов длины k над кольцом \mathbb{Z}_p . Предположим, что первая матрица заполнена постоянными элементами, а вторая — переменными $x_{ij} \in \mathbb{Z}_p$. Тогда элементами произведения матриц являются k^2 линейных функций. Общее число таких функций, возникающих при перемножении (согласно рассматриваемому алгоритму) различных подматриц порядка k , равно $O((n/k)^\omega k^2)$. Все эти функции линейные, так как алгоритм билинейный. Каждая из них зависит от k переменных, причем различных наборов переменных имеется ровно $(n/k)^2 k = n^2/k$. Поскольку коэффициенты у каждой из них p -значные, есть ровно p^k различных функций от данного набора переменных, а всего ровно $p^k n^2/k$ таких функций. Можно построить p -значную схему с n^2 входами (на которые подаются элементы переменной

матрицы), которая будет вычислять значения всех этих функций на $p^k n^2/k$ ее выходах. Элементы схемы выполняют операции сложения по модулю p , и для ее построения достаточно использовать $p^k n^2/k$ элементов (если вычислять функции в подходящем порядке). Построенную схему можно преобразовать в булеву схему, закодировав элементы кольца \mathbb{Z}_p булевыми векторами длины $\lambda(p)$. Сложность булевой схемы для вычисления всей системы $O((n/k)^\omega k^2)$ линейных функций равна $O(p^k n^2 \lambda(p)/k)$. Чтобы вычислить произведение подматриц порядка k , достаточно взять значения подходящих k^2 выходов построенной схемы. Поэтому вся булева схема для вычисления умножения переменной матрицы порядка n на фиксированную матрицу того же порядка имеет сложность

$$O(p^k n^2 \lambda(p)/k + (n/k)^\omega k^2 \lambda(p)) = O(n^\omega \lambda(p)) / \log_p^\omega n = O(n^\omega \lambda^{\omega+1}(p)) / \lambda^\omega(n).$$

Для умножения двух произвольных матриц билинейным алгоритмом использовать булеву схему не удастся, но это можно сделать алгоритмом битовой сложности $O(n^\omega \lambda^{\omega+1}(p)) / \lambda^\omega(n)$ на RAM-машине. Требуемый размер таблицы для запоминания значений линейных функций равен

$$p^k n^2 \lambda(p)/k = O(n^\omega \lambda^\omega(p)) / \lambda^\omega(n).$$

Чтобы умножить две булевы матрицы порядка n , выберем простые числа $p_i, i = 1, \dots, t$, и сведем задачу к умножению матриц порядка n над кольцами \mathbb{Z}_{p_i} . Число таких умножений равно $t \sim \ln n / \ln \ln n$, наибольшим из простых чисел является $p_m \sim \ln n, \lambda(p_m) = \lambda(\lambda(n)) + O(1), \lambda(p_1 \dots p_m) = O(\lambda(n))$, значит, сложность всех операций умножения, а потому и сложность булева умножения по порядку не больше $O(n^\omega \lambda(\lambda(n))^\omega) / \lambda^{\omega-1}(n)$.

Например, для умножения булевых матриц порядка 2^{32} можно использовать кольцо $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \dots \times \mathbb{Z}_{29}$. Булево умножение матриц сводится к умножениям матриц над кольцами простых порядков от 2 до 29. Для умножения матриц порядка n над кольцом \mathbb{Z}_p разобьем их на подматрицы порядка не больше k . При $p = 2, \dots, 29$ используем значения $k = 28, 16, 11, 9, 7, 7, 6, 6, 5, 4$ соответственно. Для умножения блочных матриц применим алгоритм [7]. Сложность операции умножения пары блоков порядка k равна k^2 . Сложность операции сложения блоков равна $k^2 A(p)$. Применяем оценки $A(2) = 1, A(3) = 7, A(5) = 27, A(7) = 17, A(11) = 38, A(13) = 38, A(17) = 41, A(19) = 49, A(23) = 49, A(29) = 49$. Матрицы порядка 2^{32} разбиваем на блоки порядка 4, получаем матрицы порядка 2^{30} , перемножаем их алгоритмом Штрассена–Винограда, в котором для умножения блоков используем 16 операций извлечения из таблицы и для сложения блоков — 16 операций сложения по модулю 29 (битовой сложности 49 каждая). Рекурсивное применение алгоритма умножения начинаем с матриц порядка 16. Оценка его алгебраической сложности равна $((8^4 50 + 4^5 49) / 7^4) \cdot 16 \cdot 7^{30} < 3, 83 \cdot 10^{28}$. Объем таблицы $29^4 2^{64} 5 / 4 < 1, 64 \cdot 10^{25}$. Сложность ее предварительного вычисления $29^4 2^{64} 49 / 4 < 1, 64 \cdot 10^{26}$. Можно было бы выбрать размер блока 5, что привело бы к уменьшению сложности вычисления примерно в 0,9 раза. Умножение матриц по модулю 23 имеет примерно такую же сложность, а по модулю 19 — примерно 0,72 от указанной выше сложности. Умножение матриц по модулю 17 еще примерно в 0,82 раза проще. Остальные умножения еще быстрее. В результате получаем, что $T(n)$ немного меньше, чем $W(n)$.

2.2. Сравнение с алгоритмом “четырёх русских”. Для булева умножения матриц порядка n можно применить алгоритм из [3] (см. [5], где используется приведенное выше название), в котором вторая матрица разрезается по строкам на полосы шириной $k = \lambda(n) - \lambda(\lambda(n))$, а первая аналогично режется по столбцам, для каждой подстроки $(a_{i,kj}, \dots, a_{i,kj+j-1})$ первой матрицы вычисляются все возможные дизъюнкции $\bigvee_{s=0}^{k-1} a_{i,kj+s} \& c_s, c_s \in \{0, 1\}$, с битовой сложностью $2^k n^2/k$, а затем вычисляется не более n^3/k дизъюнкций для выполнения булева умножения двух (n, n) -матриц. Асимптотическая оценка битовой сложности этого алгоритма булева умножения матриц равна $n^3/\lambda(n)$.

Идея разрезания на полосы восходит к работе О.Б. Лупанова [10] о вентильных схемах. Позже Э.И. Нечипорук [11] показал, что умножение матрицы на столбец можно выполнить асимптотически вдвое быстрее, значит, и умножение булевых матриц можно выполнить асимптотически с битовой сложностью $n^3/(2\lambda(n))$. Используя это и сведение к треугольным матрицам, можно матрицу X^* при $n = 2^k$ вычислить со сложностью

$$8^k \left(\frac{1}{4(k-1)} + \frac{1}{4^2(k-2)} + \dots + \frac{1}{4^{k-3}} \right)$$

меньшей, чем у RW-алгоритма, уже при небольших k . В компьютерных вычислениях можно применять операции покомпонентной дизъюнкции булевых векторов длины, равной разрядности компьютера (т.е. операции покомпонентной дизъюнкции битов двух целых чисел). Если компьютер

позволяет выполнять такие операции, например, с 32-битными числами, то этот алгоритм будет работать в 32 раза быстрее.

2.3. *О быстром умножении матриц с малыми элементами.* Для умножения матриц порядка n над кольцом \mathbb{Z}_p можно выполнить обычное умножение матриц с элементами из множества $\{0, \dots, p-1\}$ и привести по модулю p элементы полученной матрицы. Так как в полученном произведении все элементы принадлежат множеству $\{0, \dots, n(p-1)^2\}$, то к такому же результату придем, если умножим эти матрицы над кольцом \mathbb{Z}_{P_s} , где $P_s = p_1 \dots p_s > N = np^2 > p_1 \dots p_{s-1}$, и выполним указанное приведение со сложностью $O(n^2 m(\lambda(P_s)))$. Вместо того чтобы вычислять по модулю P_s , сначала все элементы данных матриц с помощью “китайского алгоритма” [5] превращаем в элементы кольца $\prod_{i=1}^s \mathbb{Z}_{p_i}$ с битовой сложностью $O(n^2 \lambda(s) m(\lambda(P_s))) = O(n^2) m(\lambda(\lambda(N))) \lambda(N) / \lambda(\lambda(N))$, затем параллельно выполняем умножения этих матриц в кольцах \mathbb{Z}_{p_i} с суммарной битовой сложностью

$$M(n) \sum_{i=1}^s m(\lambda(p_i)) = O(M(n)) sm(\lambda(p_m)) = O(M(n)) m(\lambda(\lambda(N))) \lambda(N) / \lambda(\lambda(N))$$

и в конце с помощью “обратного китайского алгоритма” представляем полученные n^2 элементов произведения этих матриц в виде чисел из кольца \mathbb{Z}_{P_s} с битовой сложностью $O(n^2) m(\lambda(N)) \lambda(\lambda(N))$. Окончательно оценка битовой сложности принимает вид

$$O(M(n)) m(\lambda(\lambda(N))) \frac{\lambda(N)}{\lambda(\lambda(N))} + O(n^2) m(\lambda(N)) \lambda(\lambda(N)), \quad N = np^2.$$

В частности, при $p = n^{O(1)}$ имеем оценку $O(M(n)) m(\lambda(\lambda n)) \lambda(n) / \lambda(\lambda(n))$.

Алгоритм для умножения булевых матриц из п. 2.2 можно применить и здесь. Тогда при $M(n) = O(n^\omega)$, $p = n^{O(1)}$ для битовой сложности умножения матриц порядка n над кольцом \mathbb{Z}_p получится оценка $O(n^\omega (\lambda(\lambda(n)))^\omega) / (\lambda(n))^{\omega-1}$.

При умножении матриц небольшого размера над конечными полями предпочтительнее (в сравнении с алгоритмом [7]) алгоритм Коновальцева с оценкой $O(n^3 / \log_p n)$ для числа операций в поле $GF(p)$. В [12] он приведен для решения систем линейных уравнений, но, как известно [5], алгоритм решения линейных систем имеет сложность по порядку такую же, как алгоритм умножения матриц над тем же полем. В алгоритме [12] используется восходящая к [10] идея, и он опубликован раньше, чем [3]. Умножение матриц порядка n над кольцом \mathbb{Z}_N еще быстрее можно выполнить алгоритмом [13], имеющим асимптотическую оценку битовой сложности $(n^3 A(N) \log_2 N) / (2\lambda(n) + \lambda(\lambda(N)))$. В случае применения указанного выше приема при простых $p = n^{O(1)}$ выбираем попарно взаимно простые p_l так, что $P_m = p_1 \dots p_m > N = np^2 > p_1 \dots p_{m-1}$, $m = O(\lambda(p))$, $p_1 < \dots < p_m = O(\lambda(p) \lambda(\lambda(p)))$, сложность умножения матриц порядка n над кольцом \mathbb{Z}_{p_l} асимптотически оценивается как $\frac{n^3 A(p_l) \log_2 p_l}{2\lambda(n)}$. Суммируя, получаем оценку битовой сложности умножения матриц порядка n над кольцом \mathbb{Z}_p при $p = n^{O(1)}$, $p^2 n < p_1 \dots p_m$ в виде

$$\frac{n^3}{2\lambda(n)} \sum_{l=1}^m A(p_l) \log_2 p_l,$$

а так как

$$\sum_{l=1}^m A(p_l) \log_2 p_l = O(\lambda(n) (\lambda(\lambda(n)))^2),$$

то указанная оценка принимает вид $O(n^3 (\lambda(\lambda(n)))^2)$.

В конкретных случаях оценку можно получить точнее. Например, выбирая $p_1 = 3$, $p_2 = 5$, $p_3 = 7$, $p_4 = 11$, $p_5 = 13$, $p_6 = 17$, $p_7 = 19$, $p_8 = 31$, $p_9 = 32$, $p = 2^8 + 1$, $n = 2^{16}$, имеем

$$\sum_{l=1}^9 A(p_l) \log_2 p_l =$$

$$= 7 \log_2 3 + 27 \log_2 5 + 17 \log_2 7 + 36 \log_2 11 + 36 \log_2 13 + 36 \log_2 17 + 55 \log_2 19 + 35 \log_2 31 + 20 \cdot 5 < 1030.$$

Тогда указанный выше алгоритм умножения матриц порядка $n = 2^{16}$ над кольцом $\mathbb{Z}_p, p = 2^8 + 1$, имеет битовую сложность менее $33n^3 < 10^{16}$, а например, алгоритм [7] имеет битовую сложность больше $7^{16} \cdot m(\lambda(p)) > 10^{16}$.

В случае больших p лучше оценка $O(n^2 M(\lambda(p)))$, полученная в 1993 г. М.И. Гринчуком [14]. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты № 19-01-00294, 18-01-00337.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Warshall S.* A theorem on Boolean matrices // J. ACM. 1962. **9**, N 1. 11–12.
2. *Roy B.* Transitive et connexite // C.r. Acad. sci. 1959. **249**, N 6. 216–218.
3. *Арлазоров В.Л., Диниц Е.А., Кронрод М.А., Фараджеев И.А.* Об экономном построении транзитивного замыкания графа // Докл. АН СССР. 1970. **194**, № 3. 487–488.
4. *Фурман М.Е.* О применении метода быстрого умножения матриц в задаче нахождения транзитивного замыкания графа // Докл. АН СССР. 1971. **194**, № 3. 524.
5. *Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж.* Построение и анализ вычислительных алгоритмов. М.: Мир, 1979.
6. *Savitch W.J.* Relationship between nondeterministic and deterministic tape complexities // J. Comput. and Syst. Sci. 1970. **4**, N 2. 177–192.
7. *Strassen V.* Gaussian elimination is not optimal // Numer. math. 1969. **13**, N 4. 554–556.
8. *Fisher M.J., Meyer A.R.* Boolean matrix multiplication and transitive closure // IEEE 12th Annual Symp. on Switching and Automata Theory. 1971. 129–131.
9. *Гринчук М.И.* Уточнение верхней оценки глубины сумматора и компаратора // Дискрет. анализ и исследование операций. Сер. 1. 2008. **15**, №2. 12–22.
10. *Луцанов О.Б.* О вентильных и контактно-вентильных схемах // Докл. АН СССР. 1956. **111**, № 6. 1171–1174.
11. *Нечипорук Э.И.* О синтезе вентильных схем // Проблемы кибернетики. Вып. 11. М.: Наука, 1963. 37–44.
12. *Коновальцев И.В.* Об одном алгоритме решения линейных уравнений в конечных полях // Проблемы кибернетики. Вып. 19. М.: Наука, 1967. 269–274.
13. *Pippenger N.* On the evaluation powers and monomials // SIAM J. Comput. 1980. **9**, N 2. 230–250.
14. *Гринчук М.И.* О битовой сложности вычисления систем билинейных форм // Методы и системы технической диагностики: Межвуз. сб. № 18. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1993. 54.

Поступила в редакцию
27.02.2020

УДК 517.93

СТРОЕНИЕ МНОЖЕСТВ ТОЧЕК ПОЛУНЕПРЕРЫВНОСТИ ε -ЕМКОСТИ НЕАВТОНОМНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, НЕПРЕРЫВНО ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРА

А. Н. Ветохин¹

Для семейства неавтономных динамических систем, непрерывно зависящих от параметра, получено описание множества точек полунепрерывности снизу и множества точек полунепрерывности сверху ε -емкости его систем, рассматриваемой как функция параметра. Для множества точек полунепрерывности сверху данное описание является полным в случае, когда параметр принадлежит полному метрическому сепарабельному нульмерному пространству.

Ключевые слова: ε -емкость, неавтономная динамическая система, бэровская классификация функций.

For a family of non-autonomous dynamical systems continuously depending on a parameter, we present descriptions of the set of lower semicontinuity points and the set of upper semicontinuity

¹ *Ветохин Александр Николаевич* — доктор физ.-мат. наук, доцент каф. дифференциальных уравнений мех.-мат. ф-та МГУ; проф. каф. ФН-1 “Высшая математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана, e-mail: anveto27@yandex.ru.

Vetokhin Aleksandr Nikolaevich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associated Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mathematics and Mechanics, Chair of Differential Equations; Professor, Bauman Moscow State Technical University, Chair of Higher Mathematics.

points of the ε -capacity of its systems considered as a function of the parameter. For the set of points of upper semicontinuity, this description is complete if the parameter belongs to a complete metric separable zero-dimensional space.

Key words: ε -capacity, non-autonomous dynamical system, Baire classification of functions.

В качестве меры “массивности” компактного метрического пространства (X, d) А. Н. Колмогоров в статье [1] ввел понятие ε -емкости, которая определяется как максимальное число ε -различимых элементов в X . Используя это понятие, приведем определение топологической энтропии неавтономной динамической системы [2]. Пусть $f \equiv (f_1, f_2, \dots)$ — последовательность непрерывных отображений из X в X . Наряду с исходной метрикой d определим на X дополнительную систему метрик

$$d_n^f(x, y) = \max_{0 \leq i \leq n-1} d(f^{oi}(x), f^{oi}(y))$$

$$(f^{oi} \equiv f_i \circ \dots \circ f_1, f^{o0} \equiv \text{id}_X), \quad x, y \in X, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ обозначим через $N_d(f, \varepsilon, n)$ ε -емкость пространства (X, d_n^f) , т.е. максимальное количество точек в X , попарные d_n^f -расстояния между которыми больше ε . Тогда *топологическая энтропия* неавтономной динамической системы (X, f) определяется формулой

$$h_{\text{top}}(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln N_d(f, \varepsilon, n). \quad (1)$$

Отметим, что величина (1) не изменится, если в ее определении метрику d заменить на любую другую, задающую на X ту же, что и d , топологию. Для того чтобы получить классическое определение топологической энтропии автономной динамической системы, следует в качестве последовательности f взять стационарную последовательность (f, f, \dots) .

По метрическому пространству \mathcal{M} и последовательности непрерывных отображений

$$f \equiv (f_1, f_2, \dots), \quad f_i : \mathcal{M} \times X \rightarrow X, \quad (2)$$

образуем функцию

$$\mu \mapsto h_{\text{top}}(f(\mu, \cdot)). \quad (3)$$

В работе [3] доказано, что при произвольных \mathcal{M} , X и для любой последовательности отображений (2) функция (3) принадлежит третьему бэровскому классу. Напомним, что функциями нулевого бэровского класса на метрическом пространстве \mathcal{M} называются непрерывные функции и для всякого натурального числа p функциями p -го бэровского класса называются функции, являющиеся поточечными пределами последовательностей функций $(p-1)$ -го класса. В статье [4] для $X = [0, 1]$ и \mathcal{M} — множества иррациональных чисел (с метрикой, индуцированной естественной метрикой вещественной прямой) построена такая последовательность отображений (2), что функция (3) не принадлежит второму бэровскому классу на пространстве \mathcal{M} .

Наряду с топологической энтропией неавтономной динамической системы (1) для произвольного положительного ε рассмотрим ε -емкость неавтономной динамической системы, которая определяется формулой

$$h_d(f, \varepsilon) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln N_d(f, \varepsilon, n).$$

Эта величина характеризует скорость экспоненциального роста числа отрезков орбит, различимых с точностью ε . Отметим, что ε -емкость неавтономной динамической системы уже зависит от выбора метрики на пространстве X . Рассмотрим функцию

$$\mu \mapsto h_d(f(\mu, \cdot), \varepsilon). \quad (4)$$

В настоящей работе будем изучать функцию (4) с точки зрения теории Бэра разрывных функций.

Теорема 1. *Для любой последовательности отображений (2) функция (4) принадлежит второму бэровскому классу, причем ее множество точек полунепрерывности сверху является множеством типа G_δ , а множество точек полунепрерывности снизу — множеством типа $F_{\sigma\delta}$.*

Доказательство. В работе [3] установлено, что

$$h_d(f(\mu, \cdot), \varepsilon) = \lim_{m \rightarrow +\infty} h_d^m(f(\mu, \cdot), \varepsilon), \quad h_d^1(f(\mu, \cdot), \varepsilon) \geq h_d^2(f(\mu, \cdot), \varepsilon) \geq \dots, \quad (5)$$

где для любого натурального числа m функция $\mu \mapsto h_d^m(f(\mu, \cdot), \varepsilon)$ принадлежит первому бэровскому классу на пространстве \mathcal{M} , а следовательно, для любого положительного ε функция (4) принадлежит второму бэровскому классу.

Обозначим через N_1 множество точек, которые не являются точками полунепрерывности сверху для функции (4). Это множество имеет вид

$$N_1 = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \left(\{ \mu \in \mathcal{M} : h_d(f(\mu, \cdot), \varepsilon) < r \} \cap (\mathcal{M} \setminus \text{int} \{ \mu \in \mathcal{M} : h_d(f(\mu, \cdot), \varepsilon) < r \}) \right), \quad (6)$$

где \mathbb{Q} — множество рациональных чисел, а $\text{int } Z$ — множество внутренних точек множества Z . Действительно, разность $\{ \mu \in \mathcal{M} : h_d(f(\mu, \cdot), \varepsilon) < r \} \setminus \text{int} \{ \mu \in \mathcal{M} : h_d(f(\mu, \cdot), \varepsilon) < r \}$ при любом $r \in \mathbb{Q}$ не содержит точек полунепрерывности сверху функции (4), с другой стороны, если точка μ_0 принадлежит множеству N_1 , то найдется такое число $r_0 \in \mathbb{Q}$, для которого $\mu_0 \in \{ \mu \in \mathcal{M} : h_d(f(\mu, \cdot), \varepsilon) < r_0 \}$ и $\mu_0 \notin \text{int} \{ \mu \in \mathcal{M} : h_d(f(\mu, \cdot), \varepsilon) < r_0 \}$. Следовательно, имеет место равенство

$$N_1 = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \left(\{ \mu \in \mathcal{M} : h_d(f(\mu, \cdot), \varepsilon) < r \} \setminus \text{int} \{ \mu \in \mathcal{M} : h_d(f(\mu, \cdot), \varepsilon) < r \} \right).$$

Из равенства

$$\begin{aligned} & \{ \mu \in \mathcal{M} : h_d(f(\mu, \cdot), \varepsilon) < r \} \setminus \text{int} \{ \mu \in \mathcal{M} : h_d(f(\mu, \cdot), \varepsilon) < r \} = \\ & = \{ \mu \in \mathcal{M} : h_d(f(\mu, \cdot), \varepsilon) < r \} \cap (\mathcal{M} \setminus \text{int} \{ \mu \in \mathcal{M} : h_d(f(\mu, \cdot), \varepsilon) < r \}) \end{aligned}$$

получим формулу (6).

В силу (5) для любого $r \in \mathbb{Q}$ множество $\{ \mu \in \mathcal{M} : h_d(f(\mu, \cdot), \varepsilon) < r \}$ можно представить в виде

$$\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \{ \mu \in \mathcal{M} : h_d^m(f(\mu, \cdot), \varepsilon) < r \}.$$

Так как функции $\mu \mapsto h_d^m(f(\mu, \cdot), \varepsilon)$ принадлежат первому бэровскому классу, то для любого $m \in \mathbb{N}$ множество $\{ \mu \in \mathcal{M} : h_d^m(f(\mu, \cdot), \varepsilon) < r \}$ является множеством типа F_σ [5, с. 231], а следовательно, множество точек N_1 — множество типа F_σ . Таким образом, множество точек полунепрерывности сверху функции (4) является множеством типа G_δ .

Обозначим через N_2 множество точек, которые не являются точками полунепрерывности снизу функции (4). Это множество можно записать в виде

$$N_2 = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \left(\{ \mu \in \mathcal{M} : h_d(f(\mu, \cdot), \varepsilon) > r \} \cap (\mathcal{M} \setminus \text{int} \{ \mu \in \mathcal{M} : h_d(f(\mu, \cdot), \varepsilon) > r \}) \right).$$

Для любого $r \in \mathbb{Q}$ множество $\{ \mu \in \mathcal{M} : h_d(f(\mu, \cdot), \varepsilon) > r \}$ можно представить следующим образом:

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \{ \mu \in \mathcal{M} : h_d^m(f(\mu, \cdot), \varepsilon) \geq r + \frac{1}{k} \}.$$

Так как функции $\mu \mapsto h_d^m(f(\mu, \cdot), \varepsilon)$ принадлежат первому бэровскому классу, то для любых $k, m \in \mathbb{N}$ множество $\{ \mu \in \mathcal{M} : h_d^m(f(\mu, \cdot), \varepsilon) \geq r + \frac{1}{k} \}$ является множеством типа G_δ , а следовательно, множество точек N_2 — множество типа $G_{\delta\sigma}$. Таким образом, множество точек полунепрерывности снизу функции (2) является множеством типа $F_{\sigma\delta}$. Теорема 1 доказана.

Естественно возникает вопрос об уменьшении номера бэровского класса в теореме 1. Рассмотрим множество Ω_2 двусторонних последовательностей

$$x = (\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots), \quad x_i \in \{0, 1\},$$

с метрикой

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y; \\ 2^{-\min\{i: x_i \neq y_i\}}, & \text{если } x \neq y. \end{cases}$$

На пространстве Ω_2 введем отображение сдвига влево на один элемент $\sigma_{\Omega_2}(x_k)_{k \in \mathbb{Z}} = (x_{k+1})_{k \in \mathbb{Z}}$.

Лемма. Пусть каждый член последовательности отображений $f \equiv (f_1, f_2, \dots)$ совпадает с id_{Ω_2} или с σ_{Ω_2} , тогда топологическая энтропия неавтономной динамической системы, порожденной этой последовательностью, удовлетворяет неравенству $h_{\text{top}}(f) \leq \ln 2$.

Доказательство. Для любых $p, n \in \mathbb{N}$ рассмотрим множество $Q_{p,n}$ элементов $x \in \Omega_2$, таких, что

$$x_i = \begin{cases} 0 \text{ или } 1, & \text{если } i = -p, \dots, n + p; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Множество шаров с центрами из множества $Q_{p,n}$ и радиусом 2^{-p} в пространстве (Ω_2, d_n^f) покрывает все пространство (Ω_2, d_n^f) . Величина $N_d(f, 2^{-p+1}, n)$ не превышает количества точек в множестве $Q_{p,n}$, так как в противном случае две точки, расстояние между которыми больше 2^{-p+1} , находились бы в одном шаре радиуса 2^{-p} . Мощность множества $Q_{p,n}$ равна 2^{n+2p+1} , следовательно, получаем

$$h_{\text{top}}(f) = \lim_{p \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln N_d(f, 2^{-p+1}, n) \leq \lim_{p \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 2p + 1}{n} \ln 2 = \ln 2.$$

Лемма доказана.

Теорема 2. Пусть $M = X = \Omega_2$, тогда существует такая последовательность отображений (2), что для любого $\varepsilon \in (0; \frac{1}{4}]$ функция (4) не принадлежит первому бэровскому классу на пространстве M .

Доказательство. Определим последовательность отображений (2) следующим образом:

$$f_k((\dots, \mu_{-1}, \mu_0, \mu_1, \dots), (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)) = (\dots, x_{-1+\mu_k}, x_{0+\mu_k}, x_{1+\mu_k}, \dots), \quad k \in \mathbb{N}, \mu \in \Omega_2, x \in \Omega_2.$$

В силу определения отображение f_k является непрерывным на пространстве $\Omega_2 \times \Omega_2$ для каждого $k \in \mathbb{N}$.

В пространстве Ω_2 зададимся множествами A и B . Отнесем к множеству A все элементы из Ω_2 , в записи которых начиная с некоторого номера стоят только единицы, а к множеству B — все элементы из Ω_2 , в записи которых начиная с некоторого номера стоят только нули. Очевидно, что каждое из множеств A и B плотно в пространстве Ω_2 .

Установим, что $h_d(f(\mu, \cdot), \varepsilon) = \ln 2$ при $\mu \in A$ и $h_d(f(\mu, \cdot), \varepsilon) = 0$ при $\mu \in B$. Пусть p — наибольшее натуральное число, удовлетворяющее условию $2^{-p} > \varepsilon$. Пусть $\mu \in A$, тогда найдется такое число $k_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $k > k_0$ выполнено равенство $\mu_k = 1$. Для любого $k > k_0$ рассмотрим множество $Q_{k_0,p,k}$ элементов $x \in \Omega_2$, таких, что

$$f^{\circ k_0}(x) = (y_i)_{i \in \mathbb{Z}} = \begin{cases} 0 \text{ или } 1, & \text{если } i = 0, 1, \dots, k + p - k_0 - 1; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Так как отображение $f^{\circ k_0}$ является гомеоморфизмом, то мощность множества $Q_{k_0,p,k}$ равна 2^{k+p-k_0} . Пусть $a, b \in Q_{k_0,p,k}$, $a \neq b$, и $f^{\circ k_0}(a) = (\dots, 0, c_0, c_1, \dots)$, $f^{\circ k_0}(b) = (\dots, 0, d_0, d_1, \dots)$, тогда найдется наименьшее $i \in \{0, 1, \dots, k + p - k_0 - 1\}$, такое, что $c_0 = d_0, \dots, c_{i-1} = d_{i-1}, c_i \neq d_i$. Пусть $i \in \{0, 1, \dots, p\}$, тогда

$$d_{k_0+i+1}^{f(\mu, \cdot)}(a, b) \geq d_{k_0+i+1}^{f(\mu, \cdot)}(a, b) \geq 2^{-p} > \varepsilon,$$

если же $i \in \{p + 1, \dots, k + p - k_0 - 1\}$, то

$$d_{k_0+i+1}^{f(\mu, \cdot)}(a, b) \geq d(f^{\circ(i-p+k_0)}(\mu, a), f^{\circ(i-p+k_0)}(\mu, b)) \geq 2^{-p} > \varepsilon.$$

Следовательно, величина $N_d(f(\mu, \cdot), \varepsilon, k)$ не меньше, чем мощность множества $Q_{k_0,p,k}$, откуда получаем

$$h_d(f(\mu, \cdot), \varepsilon) = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln N_d(f(\mu, \cdot), \varepsilon, k) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k + p - k_0) \ln 2}{k} = \ln 2.$$

С другой стороны, из леммы имеем $h_d(f(\mu, \cdot), \varepsilon) \leq h_{\text{top}}(f) \leq \ln 2$.

Пусть $\mu \in B$, тогда найдется такое наименьшее натуральное число k_0 , что для любого $k \geq k_0$ выполнено равенство $\mu_k = 0$. Таким образом, для любых $k \geq k_0$ и $\mu \in M$ имеет место равенство $f^{\circ k}(\mu, \cdot) = f^{\circ k_0}(\mu, \cdot)$, следовательно, выполнено равенство $N_d(f(\mu, \cdot), \varepsilon, k) = N_d(f(\mu, \cdot), \varepsilon, k_0)$, а значит, ε -емкость последовательности отображений $f(\mu, \cdot)$ равна нулю.

В силу всюду плотности множеств A и B каждая точка пространства Ω_2 является точкой разрыва функции $\mu \mapsto h_d(f(\mu, \cdot), \varepsilon)$, поэтому по теореме Бэра о функциях первого класса [5, с. 242] она не принадлежит первому классу Бэра. Теорема 2 доказана.

В случае полноты пространства M справедлива следующая

Теорема 3. *Если пространство M является полным, то множество точек полунепрерывности сверху функции (4) является всюду плотным множеством типа G_δ .*

Доказательство. Воспользуемся представлением (5). Так как для любого натурального числа m функция $\mu \mapsto h_d^m(f(\mu, \cdot), \varepsilon)$ принадлежит первому бэровскому классу на пространстве M , то в силу теоремы Бэра [5, с. 242] множество G_m точек непрерывности каждой функции $\mu \mapsto h_d^m(f(\mu, \cdot), \varepsilon)$ является всюду плотным множеством типа G_δ . Пересечение всех G_m снова является всюду плотным множеством типа G_δ , каждая точка которого является точкой непрерывности всех функций $h_d^m(f(\mu, \cdot), \varepsilon)$. Пусть $\mu_0 \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} G_m$ и $\delta > 0$, тогда при достаточно большом m будем иметь

$h_d^m(f(\mu_0, \cdot), \varepsilon) \leq h_d(f(\mu_0, \cdot), \varepsilon) + \delta$. Зафиксировав так m , найдем окрестность $O(\mu_0)$ точки μ_0 , такую, что $h_d^m(f(\mu, \cdot), \varepsilon) \leq h_d^m(f(\mu_0, \cdot), \varepsilon) + \delta$ для всякого $\mu \in O(\mu_0)$. Так как последовательность $(h_d^m(f(\mu, \cdot), \varepsilon))_{m=1}^\infty$ является невозрастающей, то $h_d^m(f(\mu, \cdot), \varepsilon) \geq h_d(f(\mu, \cdot), \varepsilon)$, поэтому для $\mu \in O(\mu_0)$ будем иметь $h_d(f(\mu, \cdot), \varepsilon) \leq h_d(f(\mu_0, \cdot), \varepsilon) + 2\delta$. Следовательно, в каждой точке множества $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} G_m$

функция (4) полунепрерывна сверху.

Если функция (4) принимает значение $+\infty$, то предыдущие рассуждения проводим для функции $\mu \mapsto \frac{h_d(f(\mu, \cdot), \varepsilon)}{h_d(f(\mu, \cdot), \varepsilon) + 1}$, у которой множество точек полунепрерывности сверху совпадает с множеством точек полунепрерывности сверху функции (4). Теорема 3 доказана.

Возникает естественный вопрос: всякое ли всюду плотное множество типа G_δ в пространстве M может быть множеством точек полунепрерывности сверху функции (4)? Далее в работе будет получено полное описание множества точек полунепрерывности сверху функции (4) для любого полного метрического сепарабельного нульмерного пространства M . По определению [6, с. 286] метрическое пространство имеет размерность нуль, если любая его точка имеет сколь угодно малую окрестность, являющуюся одновременно замкнутой и открытой, что равносильно пустоте границы этой окрестности. Одним из примеров такого пространства служит совершенное множество Кантора \mathcal{K} на отрезке $[0, 1]$ (множество бесконечных троичных дробей $x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$, где $a_i \in \{0, 2\}$) с метрикой, индуцированной естественной метрикой вещественной прямой. Так как дополнение к множеству \mathcal{K} всюду плотно на отрезке $[0, 1]$, то каждую точку множества \mathcal{K} можно заключить в сколь угодно малый интервал с концами из $[0, 1] \setminus \mathcal{K}$, который имеет пустую границу в множестве \mathcal{K} , значит, это пространство является нульмерным метрическим пространством. Полнота пространства \mathcal{K} следует из его замкнутости на отрезке $[0, 1]$, а сепарабельность — из всюду плотности в \mathcal{K} множества троичных дробей с конечным числом ненулевых троичных знаков после запятой.

В работе [7] для всякого всюду плотного подмножества типа G_δ в полном метрическом сепарабельном нульмерном пространстве M построена такая стационарная последовательность непрерывных на $M \times \Omega_2$ функций, что множество точек полунепрерывности снизу топологической энтропии, рассматриваемой как функция параметра, совпадает с данным подмножеством. Для ε -емкости семейства неавтономных динамических систем справедлива следующая

Теорема 4. *Пусть M — полное метрическое сепарабельное нульмерное пространство и $X = \Omega_2$. Тогда для каждого открытого всюду плотного подмножества G пространства M существует такая последовательность отображений (2), что для любых $\mu \in M$, $\varepsilon \in (0; \frac{1}{4}]$ и $k \in \mathbb{N}$ отображение $x \mapsto f_k(\mu, x)$ является гомеоморфизмом и множество точек полунепрерывности сверху функции (4) совпадает с множеством G .*

Доказательство. Для множества G , совпадающего со всем пространством M , рассмотрим стационарную последовательность отображений $f_k(\mu, \cdot) \equiv \text{id}_{\Omega_2}$, $k \in \mathbb{N}$. Так как ε -емкость тождественного отображения равна нулю, каждая точка множества G является точкой полунепрерывности сверху функции $\mu \mapsto h_d(f(\mu, \cdot), \varepsilon)$.

Пусть задано открытое множество G , не совпадающее со всем пространством M . Из сепарабельности и нульмерности пространства M получаем, что открытое множество G можно представить в

виде счетного объединения открыто-замкнутых множеств [6, с. 286]:

$$G = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} G_k, \tag{7}$$

причем без ограничения общности можно считать, что для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено включение $G_k \subset G_{k+1}$. Отметим, что в правую часть формулы (7) должно входить счетное число различных множеств, так как в противном случае, поскольку множества G_k замкнуты, множество G являлось бы замкнутым, а тогда в силу его всюду плотности в пространстве \mathcal{M} совпадало бы со всем пространством \mathcal{M} , что по предположению не так. Через χ_k обозначим характеристическую функцию множества G_k . Рассмотрим последовательность отображений $f_k : \mathcal{M} \times \Omega_2 \rightarrow \Omega_2$, определяемую формулами

$$f_k(\mu, (a_i)_{i \in \mathbb{Z}}) = (a_{i+\chi_k(\mu)})_{i \in \mathbb{Z}}, \quad k \in \mathbb{N}, \mu \in \Omega_2.$$

Поскольку множество G_k является открыто-замкнутым, характеристическая функция χ_k этого множества непрерывна на пространстве \mathcal{M} , а следовательно, отображение f_k является непрерывным на $\mathcal{M} \times \Omega_2$.

Пусть $\mu \in \mathcal{M} \setminus G$, тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено включение $\mu \in \mathcal{M} \setminus G_k$, а значит, справедливо равенство $\chi_k(\mu) = 0$, откуда получаем $f_k(\mu, \cdot) \equiv \text{id}_{\Omega_2}$, следовательно,

$$h_d(f(\mu, \cdot), \varepsilon) = 0. \tag{8}$$

Пусть $\mu \in G$, тогда найдется такое наименьшее натуральное число $k(\mu)$, что для любого $k \geq k(\mu)$ выполнено включение $\mu \in G_k$. Таким образом, справедливы равенства

$$\chi_1(\mu) = 0, \dots, \chi_{k(\mu)-1}(\mu) = 0, \chi_{k(\mu)}(\mu) = 1, \chi_{k(\mu)+1}(\mu) = 1, \dots$$

Обозначим через p наибольшее натуральное число, удовлетворяющее условию $2^{-p} > \varepsilon$. Для любого $k \in \mathbb{N}$, такого, что $k > k(\mu)$, рассмотрим множество $Q_{\mu, p, k}$ элементов x из Ω_2 , которые удовлетворяют условию

$$f^{\circ k(\mu)}(\mu, x) = (a_i)_{i \in \mathbb{Z}}, \quad a_i = \begin{cases} 0 \text{ или } 1, & \text{если } i = 0, 1, \dots, k + p - k(\mu) - 1; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Мощность множества $Q_{\mu, p, k}$ равна $2^{(n+p-k(\mu))}$. Пусть $a, b \in Q_{\mu, p, k}$ и $a \neq b$, тогда найдется число $i_0 \in \{0, 1, \dots, k+p-k(\mu)-1\}$, такое, что $a_i = b_i$ для $i = 0, \dots, i_0-1$ и $a_{i_0} \neq b_{i_0}$. Пусть $i_0 \in \{0, 1, \dots, p\}$, тогда

$$d_k^{f(\mu, \cdot)}(a, b) \geq d(a, b) \geq 2^{-p} > \varepsilon;$$

если же $i_0 \in \{p+1, \dots, k+p-k(\mu)-1\}$, то

$$d_k^{f(\mu, \cdot)}(a, b) \geq d(f^{\circ(i_0-p+k(\mu))}(\mu, a), f^{\circ(i_0-p+k(\mu))}(\mu, b)) \geq 2^{-p} > \varepsilon.$$

Следовательно, величина $N_d(f(\mu, \cdot), \varepsilon, k)$ не меньше, чем мощность множества $Q_{\mu, p, k}$. Таким образом, получаем

$$h_d(f(\mu, \cdot), \varepsilon) = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln N_d(f(\mu, \cdot), \varepsilon, k) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+p-k(\mu)) \ln 2}{k} = \ln 2. \tag{9}$$

С другой стороны, по лемме имеем $h_d(f(\mu, \cdot), \varepsilon) \leq h_{\text{top}}(f(\mu, \cdot)) \leq \ln 2$. Таким образом, каждая точка $\mu \in G$ является точкой полунепрерывности сверху функции $\mu \mapsto h_d(f(\mu, \cdot), \varepsilon)$. Поскольку множество G всюду плотно в пространстве \mathcal{M} , в любой окрестности каждой точки $\mu \in \mathcal{M} \setminus G$ есть точка из множества G , а следовательно, в силу (8) и (9) точка μ не является точкой полунепрерывности сверху функции $\mu \mapsto h_d(f(\mu, \cdot), \varepsilon)$.

Пусть множество G является множеством типа G_δ и не является открытым в пространстве \mathcal{M} , а следовательно, представимо в виде счетного пересечения открытых множеств:

$$G = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} G_k, \tag{10}$$

где $G_k \supset G_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$. Отметим, что в правую часть равенства (10) должно входить счетное число различных открытых множеств, не являющихся замкнутыми в пространстве \mathcal{M} , так как в противном случае множество G либо множество $\mathcal{M} \setminus G$ являлось бы открытым, что противоречит всюду плотности множества G . Таким образом, можно считать, что каждое множество G_k открыто и не является замкнутым. Каждое множество G_k представимо в виде счетного объединения открыто-замкнутых множеств: $G_k = \bigcup_{l \in \mathbb{N}} G_{kl}$, причем без ограничения общности можно считать, что для

любого $l \in \mathbb{N}$ выполнено включение $G_{kl} \subset G_{kl+1}$. Пусть χ_{kl} — характеристическая функция множества G_{kl} . Для любых $k \in \mathbb{N}$ и $\mu \in \mathcal{M}$ обозначим через $l_k(\mu)$ наименьшее натуральное число, такое, что $\chi_{kl_k(\mu)}(\mu) = 1$; если такого числа не существует, то считаем $l_k(\mu) = 1$.

По последовательности $\{l_k(\mu)\}_{k=1}^\infty$ построим возрастающую последовательность $\{m_k(\mu)\}_{k=0}^\infty$, где

$$m_k(\mu) = \begin{cases} 1 & \text{при } k = 0; \\ 2^k(l_k(\mu) + \sum_{i=0}^{k-1} m_i(\mu)) + 1 & \text{при } k > 0. \end{cases}$$

Положим $s_k(\mu) = \sum_{i=0}^k m_i(\mu)$. Пусть $n \in \{s_{k-1}(\mu) + 1, \dots, s_k(\mu)\}$, $k \in \mathbb{N}$. Определим отображение $f_n : \mathcal{M} \times \Omega_2 \rightarrow \Omega_2$ следующим образом:

$$f_n(\mu, (a_i)_{i \in \mathbb{Z}}) = (a_{i + \chi_{kn - s_{k-1}(\mu)}(\mu)})_{i \in \mathbb{Z}}.$$

Зафиксируем $\mu_0 \in \mathcal{M}$. Поскольку множества G_{qr} , $q = 1, \dots, k$, $r = 1, \dots, m_r(\mu_0)$, являются открыто-замкнутыми в пространстве \mathcal{M} , то характеристические функции этих множеств постоянны в некоторой окрестности $\mathcal{O}(\mu_0) \subset \mathcal{M}$ точки μ_0 , а следовательно, при каждом $\mu \in \mathcal{O}(\mu_0)$ отображение $f_n(\mu, \cdot)$ является или тождественным отображением на пространстве Ω_2 , или отображением сдвига влево на один элемент на пространстве Ω_2 . Таким образом, отображение f_n является непрерывным в любой точке пространства $\mathcal{M} \times \Omega_2$.

Пусть $\mu \in \mathcal{M} \setminus G$, тогда найдется такое наименьшее натуральное число $k(\mu)$, что для любого $p \in \mathbb{N}$ имеет место включение $\mu \in \mathcal{M} \setminus G_{k(\mu)p}$, а следовательно, выполнено равенство $\chi_{k(\mu)p}(\mu) = 0$. Для любого $n > s_{k(\mu)-1}(\mu)$ справедливо тождество $f_n(\mu, \cdot) \equiv \text{id}_{\Omega_2}$, из которого получаем

$$h_d(f(\mu, \cdot), \varepsilon) = 0. \tag{11}$$

Пусть $\mu \in G$, тогда для любых $k \in \mathbb{N}$ и $n \in \{s_{k-1}(\mu) + l_k(\mu), \dots, s_k(\mu)\}$ выполнено равенство $\chi_{kn - s_{k-1}(\mu)}(\mu) = 1$. Обозначим через p наибольшее натуральное число, удовлетворяющее условию $2^{-p} > \varepsilon$. Рассмотрим множество $Q_{\mu, k, p}$ элементов $x \in \Omega_2$, таких, что

$$f^{\circ(s_{k-1}(\mu) + l_k(\mu) - 1)}(\mu, x) = (y_i)_{i \in \mathbb{Z}}, \quad y_i = \begin{cases} 0 \text{ или } 1, & \text{если } i = 0, 1, \dots, m_k(\mu) + p - l_k(\mu) - 1; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Так как отображение $f^{\circ(s_{k-1}(\mu) + l_k(\mu) - 1)}(\mu, \cdot)$ является гомеоморфизмом, то мощность множества $Q_{\mu, k, p}$ равна $2^{m_k(\mu) + p - l_k(\mu)}$. Пусть $a, b \in Q_{\mu, k, p}$, $a \neq b$, и $f^{\circ(s_{k-1}(\mu) + l_k(\mu) - 1)}(\mu, a) = (\dots, 0, c_0, c_1, \dots)$, $f^{\circ(s_{k-1}(\mu) + l_k(\mu) - 1)}(\mu, b) = (\dots, 0, d_0, d_1, \dots)$, тогда найдется наименьшее $i \in \{0, 1, \dots, m_k(\mu) + p - l_k(\mu) - 1\}$, такое, что $c_0 = d_0, \dots, c_{i-1} = d_{i-1}, c_i \neq d_i$. Пусть $i \in \{0, 1, \dots, p\}$, тогда

$$d_{s_k(\mu)}^{f(\mu, \cdot)}(a, b) \geq d_{s_{k-1}(\mu) + l_k(\mu)}^{f(\mu, \cdot)}(a, b) \geq 2^{-p} > \varepsilon;$$

если же $i \in \{p + 1, \dots, m_k(\mu) + p - l_k(\mu) - 1\}$, то

$$d_{s_k(\mu)}^{f(\mu, \cdot)}(a, b) \geq d(f^{\circ(s_{k-1}(\mu) + l_k(\mu) + i - p)}(\mu, a), f^{\circ(s_{k-1}(\mu) + l_k(\mu) + i - p)}(\mu, b)) \geq 2^{-p} > \varepsilon.$$

Следовательно, величина $N_d(f(\mu, \cdot), \varepsilon, s_k(\mu))$ не меньше, чем мощность множества $Q_{\mu, k, p}$, отсюда получаем

$$h_d(f(\mu, \cdot), \varepsilon) \geq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{s_k(\mu)} \ln N_d(f(\mu, \cdot), \varepsilon, s_k(\mu)) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(m_k(\mu) + p - l_k(\mu)) \ln 2}{s_{k-1}(\mu) + m_k(\mu)} = \ln 2. \tag{12}$$

С другой стороны, по лемме имеем $h_d(f(\mu, \cdot), \varepsilon) \leq h_{\text{top}}(f(\mu, \cdot)) \leq \ln 2$. Таким образом, каждая точка $\mu \in G$ является точкой полунепрерывности сверху функции $\mu \mapsto h_d(f(\mu, \cdot), \varepsilon)$. Поскольку множество G всюду плотно в пространстве \mathcal{M} , в любой окрестности каждой точки $\mu \in \mathcal{M} \setminus G$ есть точка из множества G , а следовательно, в силу (11) и (12) точка μ не является точкой полунепрерывности сверху функции $\mu \mapsto h_d(f(\mu, \cdot), \varepsilon)$. Теорема 4 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колмогоров А.Н. Асимптотические характеристики вполне ограниченных метрических пространств // Докл. АН СССР. 1956. **179**, № 3. 585–589.
2. Kolyada S., Snoha L. Topological entropy of nonautonomous dynamical systems // Random & Computational Dynamics. 1996. **4**, N 2–3. 205–233.
3. Ветохин А.Н. Точный бэровский класс топологической энтропии неавтономных динамических систем // Матем. заметки. 2019. **106**, № 3. 341–348.
4. Ветохин А.Н. О непринадлежности второму бэровскому классу топологической энтропии одного семейства гладких неавтономных динамических систем на отрезке, непрерывно зависящих от параметра // Дифференц. уравнения. 2020. **56**, № 1. 133–136.
5. Хаусдорф Ф. Теория множеств. М.: ОНТИ, 1937.
6. Куратовский К. Топология. Т. 1. М.: Мир, 1966.
7. Ветохин А.Н. О некоторых свойствах топологической энтропии и топологического давления семейств динамических систем, непрерывно зависящих от параметра // Дифференц. уравнения. 2019. **55**, № 10. 1319–1327.

Поступила в редакцию
07.02.2020

УДК 515.124, 515.126.4, 512.562

О ТОЧКАХ СОВПАДЕНИЯ ДЛЯ ПАРЫ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ТИПА ЗАМФИРЕСКУ

Ю. Н. Захарян¹, Т. Н. Фоменко²

Введено понятие пары многозначных отображений типа Замфиреску из одного метрического пространства в другое. Доказана теорема о существовании точек совпадения для таких пар отображений. Показано, что полученный результат является обобщением основной теоремы недавней совместной работы К. Няммани и А. Кевхао (Kritsana Neammanee, Anpor Kaevkhao), где введено понятие многозначного отображения Замфиреску метрического пространства в себя и получены теоремы о существовании и аппроксимации неподвижной точки у таких отображений. Кроме того, показано, что все эти результаты являются частными случаями принципа поиска нулей специальных $(1, \lambda)$ -поисковых функционалов, предложенного ранее Т. Н. Фоменко.

Ключевые слова: пара отображений типа Замфиреску, точка совпадения, неподвижная точка, поисковый функционал, принцип поиска нулей.

A concept of a pair of multi-valued Zamfirescu type mappings between metric spaces is introduced. A coincidence existence theorem is proved for such pairs of mappings. It is shown that the obtained result is a generalization of the main result of the recent joint work by the authors Kritsana Neammanee and Anpor Kaevkhao, in which the concept of a multi-valued

¹ Захарян Юрий Норикович — асп. каф. общей топологии и геометрии мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: yuri.zakharayan@gmail.com.

² Фоменко Татьяна Николаевна — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. общей математики ф-та ВМК МГУ, e-mail: tn-fomenko@yandex.ru.

Zakharayan Yuriy Norikovich — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of General Topology and Geometry.

Fomenko Tatiana Nikolaevna — Doctor of Physical and Mathematical Sciences — Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Chair of General Mathematics.

Zamfirescu mapping was introduced and the fixed point existence and approximation theorem was proved. In addition, it is shown in this paper that all listed results are partial cases of the search principle for zeros of special $(1, \lambda)$ -search functionals proposed earlier by T. N. Fomenko.

Key words: pair of Zamfirescu type multi-valued mappings, coincidence point, fixed point, search functional, principle of search for zeros.

1. Предварительные сведения. В 1972 г. Т. Замфиреску (T. Zamfirescu) в работе [1] рассмотрел класс отображений (не всегда непрерывных) метрического пространства в себя, который является более широким, чем класс сжимающих отображений. А именно он ввел следующее понятие.

Определение 1. Пусть (X, d) — метрическое пространство. Отображение $T : X \rightarrow X$ называется *отображением Замфиреску*, если и только если для него существуют числа a, b, c , удовлетворяющие неравенствам $0 \leq a < 1, 0 \leq b < \frac{1}{2}, 0 \leq c < \frac{1}{2}$, и для любых $x, y \in X$ выполнено хотя бы одно из следующих условий:

$$\begin{aligned} (z1) \quad & d(T(x), T(y)) \leq ad(x, y); \\ (z2) \quad & d(T(x), T(y)) \leq b[d(x, T(x)) + d(y, T(y))]; \\ (z3) \quad & d(T(x), T(y)) \leq c[d(x, T(y)) + d(y, T(x))]. \end{aligned}$$

В [1] получен следующий важный результат, обобщающий принцип Банаха сжимающих отображений.

Теорема 1 (Т. Zamfirescu [1]). Пусть (X, d) — полное метрическое пространство, $T : X \rightarrow X$ — отображение. Если T является отображением Замфиреску, то оно имеет единственную неподвижную точку.

Теорема Замфиреску обобщает известную теорему Банаха [2] (в случае выполнения условия (z1)), теорему Каннана [3] (в случае условия (z2)) и теорему Чаттерджи [4] (в случае условия (z3)).

Нам понадобятся следующие обозначения.

Пусть $P(X)$ — семейство всевозможных непустых подмножеств X и $T : X \rightarrow P(X)$ — многозначное отображение. Точка $x \in X$ называется *неподвижной точкой* многозначного отображения T , если $x \in T(x)$. Введем обозначения: $\text{Fix}(T) := \{x \in X | x \in T(x)\}$ — множество всех неподвижных точек T , $\text{Graph}(T) := \{(x, y) : x \in X, y \in T(x)\}$.

Для метрического пространства (X, d) обозначим через $CB(X)$ семейство всех непустых ограниченных замкнутых подмножеств X . Пусть $x \in X, A, B \subset X$. Рассмотрим $d(x, A) := \inf\{d(x, a) : a \in A\}$ — расстояние между x и A ; $d(A, B) := \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$ — расстояние между A и B ; $h(A, B) := \sup\{d(a, B) : a \in A\}$ — отклонение A от B ; $H(A, B) := \max\{h(A, B), h(B, A)\}$ — метрика Хаусдорфа на $CB(X)$, индуцированная метрикой d .

В 1967 г. С. Б. Надлер (S. B. Nadler) [5] выдвинул идею многозначного сжимающего отображения. Следующая известная теорема носит его имя и представляет многозначную версию принципа сжимающих отображений Банаха.

Теорема 2 [6]. Пусть (X, d) — полное метрическое пространство, $T : X \rightarrow CB(X)$ — многозначное α -сжимающее отображение, т.е. для некоторого $\alpha \in \mathbb{R}, 0 \leq \alpha < 1$, и любых $x, y \in X$ верно, что $H(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, y)$. Тогда $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$.

В 2010 г. появилась работа [7], в которой было введено понятие многозначного отображения Замфиреску и представлен ряд результатов о свойствах множества неподвижных точек такого отображения. Рассмотрим это понятие.

Определение 2 [7]. Пусть (X, d) — метрическое пространство, $T : X \rightarrow CB(X)$ — многозначное отображение. Отображение T является *многозначным отображением Замфиреску* тогда и только тогда, когда существуют такие числа a, b, c с условиями $0 \leq a < 1, 0 \leq b < \frac{1}{2}, 0 \leq c < \frac{1}{2}$, что для любых $x, y \in X$ верно хотя бы одно из неравенств:

$$\begin{aligned} (\tilde{z}1) \quad & H(T(x), T(y)) \leq ad(x, y); \\ (\tilde{z}2) \quad & H(T(x), T(y)) \leq b[d(x, T(x)) + d(y, T(y))]; \\ (\tilde{z}3) \quad & H(T(x), T(y)) \leq c[d(x, T(y)) + d(y, T(x))]. \end{aligned}$$

Основным результатом работы [7] является следующее утверждение.

Теорема 3 [7]. Пусть (X, d) — полное метрическое пространство, $T : X \rightarrow CB(X)$ — многозначное отображение Замфиреску. Тогда для любой точки $x_0 \in X$ и любой точки $x_1 \in T(x_0)$

существует итерационная последовательность $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ отображения T (т.е. такая, что $x_{n+1} \in T(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$), которая сходится к неподвижной точке и отображения T , причем для некоторой константы $\alpha < 1$ верны следующие оценки ($n = 1, 2, \dots$):

$$d(x_n, u) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(x_0, x_1), \quad d(x_n, u) \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} d(x_{n-1}, x_n).$$

В [7] приводится также модификация этой теоремы для случая, когда отображение T имеет компактные образы. В этом случае с учетом компактности образов и непрерывности метрики итерационная последовательность $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ может быть построена так, что $d(x_n, x_{n+1}) = d(x_n, T(x_n))$, т.е. точка x_{n+1} выбирается как точка из образа $T(x_n)$, ближайшая к точке x_n .

В настоящей работе вводится понятие пары многозначных отображений типа Замфиреску и изучается вопрос о существовании точек совпадения у таких пар отображений. Основными результатами являются теорема о существовании точек совпадения пары многозначных отображений типа Замфиреску (теорема 4) и вариант этой теоремы для случая, когда оба многозначных отображения имеют компактные образы. Показано, что из этих теорем следуют основные результаты работы [7]. Рассматривается связь всех перечисленных результатов с принципом поиска нулей так называемых (α, β) -поисковых функционалов, который был предложен Т.Н. Фоменко [8–10] (см. также варианты этого принципа и некоторое его развитие в [11, 12]).

2. Основные результаты. Пусть $(X, \rho), (Y, d)$ — полные метрические пространства, $F, G : X \rightarrow CB(Y)$ — многозначные отображения.

Определение 3. Будем говорить, что пара отображений (F, G) является *парой типа Замфиреску на X* , если $F(X) \subseteq G(X)$ и существуют такие числа a, b, c , $0 \leq a < 1, 0 \leq b < \frac{1}{2}, 0 \leq c < \frac{1}{2}$, что для любых $x, y \in X$ выполнено одно из следующих условий:

$$(fz1) \quad H(F(x), F(y)) \leq ad(G(x), G(y));$$

$$(fz2) \quad H(F(x), F(y)) \leq b[d(G(x), F(x)) + d(G(y), F(y))];$$

$$(fz3) \quad H(F(x), F(y)) \leq c[d(G(x), F(y)) + d(G(y), F(x))].$$

Напомним, что *точкой совпадения* двух многозначных отображений $F, G : X \rightarrow CB(Y)$ называется такая точка $x \in X$, что $F(x) \cap G(x) \neq \emptyset$. Множество точек совпадения отображений F, G обозначается $\text{Coin}(F, G) := \{x \in X | F(x) \cap G(x) \neq \emptyset\}$.

Нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1. Пусть A, B — замкнутые ограниченные множества в метрическом пространстве (X, d) и $A \neq B$. Тогда для любого числа $q > 1$ верно, что для каждой точки $x \in A$ существует такая точка $y \in B$, что $d(x, y) \leq qH(A, B)$.

Доказательство. В самом деле, для любой заданной точки $x \in A$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует точка $z = z(\varepsilon) \in B$, такая, что $d(x, z) < d(x, B) + \varepsilon$. При любом заданном $q > 1$, взяв $\varepsilon = \varepsilon_q = h(A, B)(q - 1)$, найдем такую точку $z = z(\varepsilon_q) \in B$, для которой

$$d(x, z) < d(x, B) + \varepsilon_q = d(x, B) + h(A, B)(q - 1) \leq h(A, B) + h(A, B)(q - 1) = qh(A, B) \leq qH(A, B). \quad \square$$

Теорема 4. Пусть $(X, \rho), (Y, d)$ — полные метрические пространства, $F, G : X \rightarrow CB(Y)$ — пара многозначных отображений типа Замфиреску. Пусть график $\text{Graph}(G)$ отображения G замкнут. Предположим также, что для некоторого $\gamma \geq 1$ и для любых $x, y \in X$ верно, что $\rho(x, y) \leq \gamma d(G(x), G(y))$.

Тогда отображения F и G имеют в X точку совпадения и начиная с любой точки $(x_0, y_0) \in \text{Graph}(F)$ можно построить последовательность элементов $\text{Graph}(F)$, сходящуюся к некоторой точке $(x_*, y_*) \in \text{Graph}(F) \cap \text{Graph}(G)$, т.е. $x_* \in \text{Coin}(F, G)$.

Доказательство. Пусть задано произвольное число $q \in \mathbb{R}$, $1 < q < \min\{\frac{1}{a}, \frac{1}{2b}, \frac{1}{2c}\}$. Рассмотрим произвольную точку $(x_0, y_0) \in \text{Graph}(F)$. В силу включения $F(X) \subseteq G(X)$ существует точка $x_1 \in X$, такая, что $y_0 \in G(x_1)$. Далее, выберем любую точку $y_1 \in F(x_1)$. Для y_1 таким же образом найдется точка x_2 , такая, что $y_1 \in G(x_2)$. В образе $F(x_2)$ согласно лемме 1 можно выбрать такую точку y_2 , для которой выполнено неравенство $d(y_1, y_2) \leq qH(F(x_1), F(x_2))$. Продолжим этот процесс.

В итоге возникают последовательности $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, такие, что $y_n \in F(x_n) \cap G(x_{n+1})$, причем $d(y_n, y_{n+1}) \leq qH(F(x_n), F(x_{n+1}))$, $n = 1, 2, \dots$

Рассмотрим возможные соотношения между величинами $d(y_0, y_1)$ и $d(y_1, y_2)$.
 Если для точек x_1, x_2 выполнено условие ($fz1$), то имеем

$$d(y_1, y_2) \leq qH(F(x_1), F(x_2)) \leq aqd(G(x_1), G(x_2)) \leq aqd(y_0, y_1).$$

Отсюда получаем $d(y_1, y_2) \leq aqd(y_0, y_1)$.

Если для точек x_1, x_2 выполнено условие ($fz2$), т.е. если

$$H(F(x_1), F(x_2)) \leq b[d(G(x_1), F(x_1)) + d(G(x_2), F(x_2))],$$

то

$$d(y_1, y_2) \leq qH(F(x_1), F(x_2)) \leq qb[d(G(x_1), F(x_1)) + d(G(x_2), F(x_2))] \leq qb[d(y_0, y_1) + d(y_1, y_2)].$$

Следовательно, $d(y_1, y_2) \leq \frac{qb}{1-qb}d(y_0, y_1)$.

И, наконец, если для точек x_1, x_2 выполнено условие ($fz3$), т.е. если

$$H(F(x_1), F(x_2)) \leq c[d(G(x_1), F(x_2)) + d(G(x_2), F(x_1))],$$

то имеем

$$\begin{aligned} d(y_1, y_2) &\leq qH(F(x_1), F(x_2)) \leq qc[d(G(x_1), F(x_2)) + d(G(x_2), F(x_1))] = \\ &= qc[d(G(x_1), F(x_2))] \leq qcd(y_0, y_2) \leq qc[d(y_0, y_1) + d(y_1, y_2)]. \end{aligned}$$

Следовательно, $d(y_1, y_2) \leq \frac{qc}{1-qc}d(y_0, y_1)$.

Обозначив $\alpha := \max\{aq, \frac{qb}{1-qb}, \frac{qc}{1-qc}\} < 1$, во всех трех случаях приходим к неравенству $d(y_1, y_2) \leq \alpha d(y_0, y_1)$.

Аналогично предыдущему, поскольку y_3 удовлетворяет условию $d(y_2, y_3) \leq qH(F(x_2), F(x_3))$, рассматривая три возможности соотношений ($fz1$), ($fz2$), ($fz3$) для пары точек (x_2, x_3) , имеем во всех случаях соотношение

$$d(y_2, y_3) \leq \alpha d(y_1, y_2) \leq \alpha^2 d(y_0, y_1).$$

Продолжая таким образом, получаем соотношения

$$d(y_n, y_{n+1}) \leq \alpha d(y_{n-1}, y_n), \tag{1}$$

откуда заключаем, что $d(y_n, y_{n+1}) \leq \alpha^n d(y_0, y_1)$, $n = 1, 2, \dots$

Ясно, что последовательность $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ является фундаментальной, а значит, сходится в полном пространстве Y . Пусть $y_n \rightarrow y_*$.

По условию теоремы

$$\rho(x_n, x_{n+1}) \leq \gamma d(G(x_n), G(x_{n+1})) \leq \gamma d(y_{n-1}, y_n) \leq \gamma \alpha^{n-1} d(y_0, y_1).$$

Поэтому и последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна, а значит, сходится в полном пространстве X . Пусть $x_n \rightarrow x_*$. Отсюда следует, что последовательности элементов графиков $\{(x_n, y_n)\} \subseteq \text{Graph}(F)$, $\{(x_{n+1}, y_n)\} \subseteq \text{Graph}(G)$ сходятся к элементу (x_*, y_*) . Так как по условию теоремы график $\text{Graph}(G)$ замкнут, то точка $(x_*, y_*) \in \text{Graph}(G)$. Покажем, что она принадлежит и графику $\text{Graph}(F)$. Для этого оценим расстояние от y_* до $F(x_*)$.

Если для точек (x_n, x_*) выполнено условие ($fz1$), то

$$\begin{aligned} d(y_*, F(x_*)) &\leq d(y_*, y_n) + d(y_n, F(x_n)) + H(F(x_n), F(x_*)) \leq \\ &\leq d(y_*, y_n) + ad(G(x_n), G(x_*)) \leq d(y_*, y_n) + ad(y_{n-1}, y_*), \end{aligned}$$

т.е. $d(y_*, F(x_*)) \leq d(y_*, y_n) + ad(y_{n-1}, y_*)$.

Если для точек (x_n, x_*) выполнено условие ($fz2$), то

$$d(y_*, F(x_*)) \leq d(y_*, y_n) + d(y_n, F(x_n)) + H(F(x_n), F(x_*)) \leq$$

$$\leq d(y_*, y_n) + bd(G(x_n), F(x_n)) + bd(G(x_*), F(x_*)) \leq d(y_*, y_n) + bd(y_{n-1}, y_n) + bd(y_*, F(x_*)),$$

т.е. $d(y_*, F(x_*)) \leq \frac{1}{1-b}[d(y_*, y_n) + bd(y_{n-1}, y_n)]$.

Если для точек (x_n, x_*) выполнено условие $(fz3)$, то аналогично предыдущему

$$d(y_*, F(x_*)) \leq d(y_*, y_n) + cd(G(x_n), F(x_*)) + cd(G(x_*), F(x_n)) \leq$$

$$\leq d(y_*, y_n) + cd(y_{n-1}, F(x_*)) + cd(y_*, y_n) \leq d(y_*, y_n) + cd(y_*, y_{n-1}) + cd(y_*, F(x_*)) + cd(y_*, y_n),$$

т.е. $d(y_*, F(x_*)) \leq \frac{1}{1-c}[(1+c)d(y_*, y_n) + cd(y_*, y_{n-1})]$.

Таким образом, справедлива следующая общая оценка: $0 \leq d(y_*, F(x_*)) \leq \mu(n)$, где

$$\mu(n) = \max\{d(y_*, y_n) + ad(y_{n-1}, y_*), \frac{1}{1-b}[d(y_*, y_n) + bd(y_{n-1}, y_n)], \frac{1}{1-c}[(1+c)d(y_*, y_n) + cd(y_*, y_{n-1})]\}$$

стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Это означает, что во всех трех случаях справедливо включение $y_* \in F(x_*)$. Следовательно, $x_* \in \text{Coin}(F, G)$, и $y_* \in F(x_*) \cap G(x_*)$ — общее значение отображений F, G в точке x_* . \square

Замечание 1. Пусть в условиях теоремы 4 образы отображения $F(x)$ компактны для любого $x \in X$. Тогда теорема 4 верна при $q = 1$, поскольку для каждой точки $y_n \in F(x_n)$ в компактном множестве $F(x_{n+1})$ существует точка y_{n+1} , ближайшая к y_n , т.е. $d(y_n, y_{n+1}) = d(y_n, F(x_{n+1})) \leq H(F(x_n), F(x_{n+1}))$.

Сравним теперь теорему 4 с теоремой 3.

Предложение 1. Теорема 3 следует из теоремы 4.

Доказательство. Пусть $Y = X, G = \text{Id}_X, F : X \rightarrow CB(X)$ и для отображения F выполнены все условия теоремы 3 в метрическом пространстве (X, d) . Заметим, что в этой ситуации условие $(\tilde{z}1)$ $H(F(x), F(y)) \leq ad(x, y)$ совпадает с условием

$$(fz1) \quad H(F(x), F(y)) \leq ad(G(x), G(y));$$

условие $(\tilde{z}2)$ $H(F(x), F(y)) \leq b[d(x, F(x)) + d(y, F(y))]$ совпадает с условием

$$(fz2) \quad H(F(x), F(y)) \leq b[d(G(x), F(x)) + d(G(y), F(y))];$$

условие $(\tilde{z}3)$ $H(F(x), F(y)) \leq c[d(x, F(y)) + d(y, F(x))]$ совпадает с условием

$$(fz3) \quad H(F(x), F(y)) \leq c[d(G(x), F(y)) + d(G(y), F(x))].$$

Дополнительное условие $d(x, y) \leq \gamma d(G(x), G(y))$ для $\gamma \geq 1$ и всех $x, y \in X$, предложенное в теореме 4, превращается в данном случае в очевидное неравенство $d(x, y) \leq \gamma d(x, y)$.

Отметим также, что в данной ситуации график $\text{Graph}(G) = \text{Graph}(\text{Id}_X)$ тождественного отображения есть диагональ $\Delta := \{(x, y) \in X \times X | y = x\}$ в прямом произведении $X \times X$ и является замкнутым подмножеством. Условие $F(X) \subseteq G(X)$ превращается в очевидное включение $F(X) \subseteq X$. Итак, из условий теоремы 3 следуют все условия теоремы 4 в описанной ситуации. \square

Теперь сравним теоремы 4 и 3 с принципом поиска нулей многозначных (α, β) -поисковых функционалов, $0 \leq \beta < \alpha$. Без ограничения общности (при необходимости заменяя метрику на эквивалентную) можно считать, что $\alpha = 1, 0 \leq \lambda = \frac{\beta}{\alpha} = \beta < 1$. Напомним необходимые определения и формулировку этого принципа (см. [8–10], а также [11, 12]).

Определение 4. Пусть на метрическом пространстве (X, d) задан неотрицательный многозначный функционал $\varphi : X \rightrightarrows \mathbb{R}_+$. Говорят, что график $\text{Graph}(\varphi)$ функционала φ является $\{0\}$ -полным, если любая фундаментальная последовательность $\{(x_n, t_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ его элементов, где $t_n \rightarrow 0$, сходится и имеет предел $(\xi, 0) \in \text{Graph}(\varphi)$.

Говорят, что график $\text{Graph}(\varphi)$ является $\{0\}$ -замкнутым, если все его предельные точки вида $(\xi, 0)$ принадлежат этому графику.

Теорема 5 (о нулях $(1, \lambda)$ -поискового функционала, см. [8–11]). Пусть на метрическом пространстве (X, d) задан неотрицательный многозначный функционал $\varphi : X \rightrightarrows \mathbb{R}_+$. Пусть функционал φ является $(1, \lambda)$ -поисковым, т.е. для некоторого числа $\lambda, 0 \leq \lambda < 1$, для любой точки $x \in X$ и любого значения $t \in \varphi(x)$ существуют такая точка $x' \in X$ и такое значение $t' \in \varphi(x')$, что $d(x, x') \leq t, t' \leq \lambda t$. Пусть, кроме того, либо график $\text{Graph}(\varphi)$ функционала φ является $\{0\}$ -полным, либо пространство (X, d) полно и график $\text{Graph}(\varphi)$ является $\{0\}$ -замкнутым. Тогда начиная из любой пары $(x_0, t_0) \in \text{Graph}(\varphi)$ можно построить последовательность $\{x_n\}_{n=0,1,\dots}$, сходящуюся к некоторой точке $\xi \in X$, такой, что $0 \in \varphi(\xi)$ и верно неравенство $d(x_0, \xi) \leq \frac{t_0}{1-\lambda}$.

Покажем, что теоремы 3 и 4 представляют частные случаи теоремы 5. Несмотря на то что, как установлено выше, теорема 3 следует из теоремы 4, для большей ясности проведем для этих теорем сравнение с теоремой 5 независимо.

Предложение 2. *Теорема 3 является следствием теоремы 5.*

Доказательство. Пусть выполнены все условия теоремы 3. Рассмотрим на образе $F(X)$ многозначный функционал $\varphi(y) := \{d(y, y') | y' \in F(y)\}$ (определенный на всем пространстве X). Покажем, что из условий теоремы 3 для отображения F следуют условия теоремы 5 для функционала φ . В самом деле, из условий и доказательства теоремы 3 следует, что для любой точки $(y, t) \in \text{Graph}(\varphi)$, где $t = d(y, y')$ для некоторого $y' \in F(y)$, существует такой элемент $(y', t') \in \text{Graph}(\varphi)$, что расстояние $d(y, y') \leq t$ (фактически они равны), и, кроме того, существует точка $y'' \in F(y')$, для которой $t' = d(y', y'') \leq \alpha d(y, y') = \alpha t$. Следовательно, функционал φ является $(1, \alpha)$ -поисковым.

Пусть задана произвольная фундаментальная (в метрике $D : (X \times \mathbb{R}_+)^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$, $D((y, t), (y', t')) := d(y, y') + |t - t'|$) последовательность $\{(y_n, t_n)\}_{n=1,2,\dots} \in \text{Graph}(\varphi)$, где $y_n \in F(X)$, $t_n \rightarrow 0$. Тогда последовательность $\{y_n\}$ сходится в полном пространстве X . Пусть $y_n \rightarrow y_* \in X$. Рассмотрим точку $(y_*, 0) \in X \times \mathbb{R}_+$ и покажем, что она принадлежит графику $\text{Graph}(\varphi)$ и $y_* \in F(y_*)$. Оценим расстояние $d(y_*, F(y_*))$. Пусть выбраны точки $y'_n \in F(y_n)$, $n = 1, 2, \dots$, такие, что $d(y_n, y'_n) = t_n$. Так как $t_n \rightarrow 0$, то очевидно, что последовательность $\{y'_n\}$ также сходится к y_* . Тогда

$$d(y_*, F(y_*)) \leq d(y_*, y'_n) + d(y'_n, F(y_*)) \leq d(y_*, y'_n) + H(F(y_n), F(y_*)).$$

По условиям теоремы 3 если для пары точек (y_n, y_*) выполнено условие $(\tilde{z}1)$, то

$$d(y_*, F(y_*)) \leq d(y_*, y'_n) + ad(y_n, y_*);$$

если для точек (y_n, y_*) выполнено условие $(\tilde{z}2)$, то

$$d(y_*, F(y_*)) \leq d(y_*, y'_n) + b[d(y_n, F(y_n)) + d(y_*, F(y_*))] \leq d(y_*, y'_n) + b[d(y_n, y'_n) + d(y_*, F(y_*))],$$

откуда получаем $d(y_*, F(y_*)) \leq \frac{1}{1-b}[d(y_*, y'_n) + bd(y_n, y'_n)]$, и, наконец, если для (y_n, y_*) выполнено условие $(\tilde{z}3)$, то

$$d(y_*, F(y_*)) \leq d(y_*, y'_n) + c[d(y_n, F(y_*)) + d(y_*, F(y_n))] \leq d(y_*, y'_n) + c[d(y_n, y_*) + d(y_*, F(y_*)) + d(y_*, y'_n)],$$

откуда заключаем, что $d(y_*, F(y_*)) \leq \frac{1}{1-c}[d(y_*, y'_n) + cd(y_n, y_*) + cd(y_*, y'_n)]$. Объединяя неравенства, получаем общую для всех трех случаев оценку: $d(y_*, F(y_*)) \leq \eta(n)$, где

$$\eta(n) = \max\{d(y_*, y'_n) + ad(y_n, y_*), \frac{1}{1-b}[d(y_*, y'_n) + bd(y_n, y'_n)], \frac{1}{1-c}[d(y_*, y'_n) + cd(y_n, y_*) + cd(y_*, y'_n)]\}$$

стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Отсюда ясно, что $d(y_*, F(y_*)) = 0$. А так как множество $F(y_*)$ замкнуто, то $y_* \in F(y_*)$, т.е. $0 \in \varphi(y_*)$, и, следовательно, график $\text{Graph}(\varphi)$ на метрическом пространстве $(F(X), d)$ является $\{0\}$ -полным. Итак, выполнены все условия теоремы 5. Ясно, что нули функционала φ , т.е. такие точки $\xi \in F(X)$, что $0 \in \varphi(\xi)$, являются неподвижными точками F . \square

Рассмотрим теперь вопрос о связи теоремы 4 с теоремой 5. Выясняется, что верно следующее

Предложение 3. *Теорема 4 является следствием теоремы 5.*

Доказательство. Пусть выполнены все условия теоремы 4. Рассмотрим многозначный функционал $\Psi : F(X) \rightrightarrows \mathbb{R}_+$. Зададим его следующим образом: для любого элемента $y \in F(X)$ положим

$$\Psi(y) := \{d(y, y') | y' \in F(G^{-1}(y))\}.$$

Выбор конкретного значения $t = d(y, y') \in \Psi(y)$ означает выбор конкретной точки y' , удовлетворяющей указанным условиям. То есть для любого $y \in F(X)$ и для любого $t \in \Psi(y)$ существует точка y' , такая, что $d(y, y') \leq t$. Далее, из доказательства теоремы 4 следует, что в силу неравенства (1) существует такая точка $y'' \in F(G^{-1}(y'))$, что $t' = d(y', y'') \leq \alpha d(y, y') = \alpha t$. Итак, многозначный функционал Ψ является $(1, \alpha)$ -поисковым. Покажем, что его график на $F(X)$ является $\{0\}$ -полным. Пусть задана произвольная фундаментальная (по метрике $D : (Y \times \mathbb{R}_+)^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$, где $D((y, t), (y', t')) := d(y, y') + |t - t'|$) последовательность его элементов $\{(y_n, t_n)\}$, где $t_n \rightarrow 0$. Тогда последовательность $\{y_n\}$ сходится в полном пространстве Y . Пусть $y_n \rightarrow y_* \in Y$.

Выберем теперь для любого $n \in \mathbb{N}$ такую точку $y'_n \in F(G^{-1}(y_n))$, что $t_n = d(y_n, y'_n)$. Тогда так как $t_n \rightarrow 0$, то очевидно, что $y'_n \rightarrow y_*$. Кроме того, для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует точка $x_n \in G^{-1}(y_n)$, такая, что $y'_n \in F(x_n)$. Тогда $y_n \in G(x_n)$. Покажем, что $\{x_n\}$ сходится. Действительно, по условию теоремы 4 $\rho(x_n, x_m) \leq \gamma d(G(x_n), G(x_m)) \leq \gamma d(y_n, y_m)$. Таким образом, $\{x_n\}$ — фундаментальная в полном пространстве X , следовательно, сходится к некоторому элементу x_* . Поскольку (x_n, y_n) принадлежит $\text{Graph}(G)$, а он замкнут по условию теоремы 4, то (x_*, y_*) принадлежит $\text{Graph}(G)$, а это значит, что $y_* \in G(x_*)$, т.е. $x_* \in G^{-1}(y_*)$.

Покажем, что $y_* \in F(x_*)$, поскольку тогда $y_* \in F(G^{-1}(y_*))$, т.е. $0 \in \Psi(y_*)$ или $(y_*, 0) \in \text{Graph}(\Psi)$. Это будет означать, что $\text{Graph}(\Psi)$ является $\{0\}$ -полным.

Итак, оценим расстояние $d(y_*, F(x_*))$. Из условий и доказательства теоремы 4 вытекают следующие оценки:

$$d(y_*, F(x_*)) \leq d(y_*, y'_n) + d(y'_n, F(x_*)) \leq d(y_*, y'_n) + H(F(x_n), F(x_*)).$$

По условиям теоремы 4 если для пары точек (x_n, x_*) выполнено условие (fz1), то

$$d(y_*, F(x_*)) \leq d(y_*, y'_n) + ad(G(x_n), G(x_*)) \leq d(y_*, y'_n) + ad(y_n, y_*),$$

откуда $d(y_*, F(x_*)) \leq d(y_*, y'_n) + ad(y_n, y_*)$;

если для точек (x_n, x_*) выполнено условие (fz2), то

$$\begin{aligned} d(y_*, F(x_*)) &\leq d(y_*, y'_n) + b[d(G(x_n), F(x_n)) + d(G(x_*), F(x_*))] \leq \\ &\leq d(y_*, y'_n) + b[d(y_n, y'_n) + d(y_*, F(x_*))], \end{aligned}$$

откуда $d(y_*, F(x_*)) \leq \frac{1}{1-b}[d(y_*, y'_n) + bd(y_n, y'_n)]$,

и, наконец, если для (x_n, x_*) выполнено условие (fz3), то

$$\begin{aligned} d(y_*, F(x_*)) &\leq d(y_*, y'_n) + c[d(G(x_n), F(x_*)) + d(G(x_*), F(x_n))] \leq \\ &\leq d(y_*, y'_n) + c[d(y_n, y_*) + d(y_*, F(x_*)) + d(y_*, y'_n)], \end{aligned}$$

откуда $d(y_*, F(x_*)) \leq \frac{1}{1-c}[(1+c)d(y_*, y'_n) + cd(y_n, y_*)]$.

Объединяя неравенства, получаем общую для всех трех случаев оценку: $d(y_*, F(x_*)) \leq \delta(n)$, где

$$\delta(n) = \max\{d(y_*, y'_n) + ad(y_n, y_*), \frac{1}{1-b}[d(y_*, y'_n) + bd(y_n, y'_n)], \frac{1}{1-c}[(1+c)d(y_*, y'_n) + cd(y_n, y_*)]\}$$

стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Отсюда ясно, что $d(y_*, F(x_*)) = 0$. Поскольку образ $F(x_*)$ замкнут по условиям теоремы 4, то $y_* \in F(x_*)$.

Итак, выполнены все условия теоремы 5. Ясно, что нули функционала Ψ , т.е. точки ξ , для которых $0 \in \Psi(\xi)$, удовлетворяют условию $\xi \in F(G^{-1}(\xi))$, а значит, существует точка $z \in G^{-1}(\xi)$, для которой $\xi \in F(z) \cap G(z)$, т.е. $z \in \text{Coin}(F, G)$. \square

Замечание 2. Нетрудно видеть, что в ситуации, когда $X = Y, G = \text{Id}_X, F : X \rightrightarrows X$ и, следовательно, $F(G^{-1}) = F$, условия теоремы 4 превращаются в условия теоремы 3 и доказательство предложения 3 повторяет доказательство предложения 2, в частности функционал Ψ превращается в функционал φ .

Основные результаты настоящей работы анонсированы в [13].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zamfirescu T. Fixed point theorems in metric spaces // Arch. Math. (Basel). 1972. **23**. 292–298.
2. Banach S. Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur application aux equations integrales // Fund. Math. 1922. **3**. 133–181.
3. Kannan R. Some results on fixed points // Bull. Calcutta Math. Soc. 1968. **10**. 71–76.
4. Chatterjea S.K. Fixed-point theorems // C.r. Acad. bulgare sci. 1972. **25**. 727–730.
5. Nadler S.B. Multi-valued contraction mappings // Notices Amer. Math. Soc. 1967. **14**. 930.
6. Nadler S.B. Multi-valued contraction mappings // Pacif. J. Math. 1969. **30**. 475–488.
7. Neammanee K., Kaevkhao A. Fixed point theorems of multi-valued Zamfirescu mappings // J. Math. Res. 2010. **2**, N 2. 150–156.

8. *Фоменко Т.Н.* О приближении к точкам совпадения и общим неподвижным точкам набора отображений метрических пространств // Матем. заметки. 2009. **86**, № 1. 110–125 (*Fomenko T.N.* Approximation of coincidence points and common fixed points of a collection of mappings of metric spaces // Math. Notes. 2009. **86**, N 1. 107–120).
9. *Фоменко Т.Н.* К задаче каскадного поиска множества совпадений набора многозначных отображений // Матем. заметки. 2009. **86**, № 2. 304–309 (*Fomenko T. N.* Cascade search of the coincidence set of collections of multivalued mappings // Math. Notes. 2009. **86**, N 1–2. 276–281).
10. *Fomenko T.N.* Cascade search principle and its applications to the coincidence problem of n one-valued or multi-valued mappings // Topol. and its Appl. 2010. **157**. 760–773.
11. *Фоменко Т.Н.* Неподвижные точки и совпадения семейств отображений упорядоченных множеств и некоторые метрические следствия // Изв. РАН. Сер. матем. 2019. **83**, № 1. 168–191.
12. *Fomenko T.N.* Functionals strictly subjected to convergent series and search for singularities of mappings // J. Fixed Point Theory and Appl. 2013. **14**. 21–40 (DOI: 10.1007/s11784-014-0155-6).
13. *Захарян Ю.Н., Фоменко Т.Н.* Сохранение нулей у семейства многозначных функционалов и приложения к теории неподвижных точек и совпадений // Докл. РАН. Сер. матем., информатика и проц. упр. 2020. **493**. 13–17.

Поступила в редакцию
18.04.2019

Механика

УДК 532.591, 531.5.031

МЕТОД РАЗРЫВНЫХ СМЕЩЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ В МЕХАНИКЕ ТРЕЩИН

А. В. Звягин¹, А. С. Удалов²

В работе рассматривается метод разрывных смещений повышенного порядка точности в приложении к задачам механики разрушения. В обычной практике приложений методов граничных элементов чаще всего применяются методы с кусочно-постоянной плотностью распределения перемещений на границе. Их преимуществом перед другими алгоритмами является простота схемы расчета при сохранении достаточно хорошей точности получаемого решения в точках области, удаленных от границы. В механике трещин (линии или поверхности разрыва поля перемещений) требуется как можно точнее описать поведение напряжений в окрестности краев трещины, что приводит к необходимости повышения порядка точности используемых численных методов. Показано, что реализованные программой методы повышенного порядка непрерывности перемещений на границе, предлагаемые в работе, существенно увеличивают точность вычисления полей перемещений и напряжений в окрестности границ трещины внутри области.

Ключевые слова: механика разрушения, трещины, коэффициенты интенсивности напряжений, метод разрывных смещений.

In this paper, the displacement discontinuity method of higher order of accuracy and its application to the problems of fracture mechanics are considered. In common practice of application of boundary element methods, the methods with step function of boundary displacement are often used. Their advantage is the simplicity of its calculation scheme with a rather good accuracy of solution at the points of region which are remote from the boundary. In the mechanics of cracks (lines or surfaces of displacement discontinuity), it is required to describe the behavior of stresses near the crack edges as accurately as possible. These requirements make it necessary to improve the accuracy of numerical methods in use. In this paper such methods are proposed. It is shown that the methods of higher order of continuity of boundary displacement implemented by our program increase the accuracy of calculation of displacement and stress fields near the boundary within the region.

Key words: fracture mechanics, cracks, stress intensity factors, displacement discontinuity method.

1. Введение. Важным разделом линейной механики разрушения является механика трещин в упругой среде [1–8]. Трещины моделируются разрывом поля перемещений в вырожденной части области (для двумерных задач — это двусторонняя кривая, для трехмерных задач — это двусторонняя поверхность). При подходе к берегам трещины с разных сторон перемещения принимают отличные друг от друга значения. На краях трещин напряжения имеют особенность — они бесконечны. Поскольку в реальных материалах существование бесконечных напряжений невозможно, в окрестности краев трещины возникает область необратимых пластических деформаций. Тем не менее в тех случаях, когда размеры данной области малы по сравнению с размерами самой трещины, показана применимость критериев роста трещины на основе анализа полученного упругого решения [3–8]. Задачи механики трещин имеют свою специфику: важнейшими характеристиками решения, подлежащими определению, являются коэффициенты интенсивности напряжений, которые описывают особенности поведения напряжений в окрестности границ трещины. Это накладывает

¹ Звягин Александр Васильевич — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. газовой и волновой динамики мех.-мат. ф-та МГУ; гл. науч. сотр. ИМАШ им. А.А. Благонравова РАН, e-mail: zvsasha@rambler.ru.

² Удалов Артем Сергеевич — студ. каф. газовой и волновой динамики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: udalets@inbox.ru.

Zvyagin Alexander Vasil'evich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Wave and Gas Dynamics; Principal Researcher, Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences.

Udalov Artem Sergeevich — Student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Wave and Gas Dynamics.

жесткие требования на точность численных решений в окрестности трещины. С ростом мощности ЭВМ методы численного решения задач механики трещин стали активно развиваться [9–12].

Одним из численных методов решения задач механики трещин является метод разрывных смещений, основой которого служит представление решения уравнений равновесия в форме сингулярных интегралов с неизвестной искомой плотностью (разрыв перемещений вдоль разреза). В настоящей работе предложен метод разрывных смещений с повышенными требованиями к плотности распределения разрыва перемещений на границе. Эффективность метода показана путем сравнения с точными аналитическими решениями.

2. Постановка задачи. Базисные решения метода разрывных смещений. Рассмотрим плоскую задачу теории упругости для безграничной области, ослабленной системой трещин. В случае плоской задачи трещины моделируются двусторонними кривыми, на которых терпит разрыв поле перемещений $u(x, y)$. Упругая плоскость находится под действием уравновешенных нагрузок, приложенных на бесконечности. Их характеризует заданный постоянный тензор напряжений σ^∞ . Считаем, что берега трещин свободны от нагрузок, т.е. вектор напряжений на верхнем и нижнем берегах трещины равен нулю: $\sigma_n^\pm = 0$. Общее решение задачи можно представить в виде суммы двух решений. Первое решение соответствует напряженно-деформированному состоянию упругой плоскости, без трещин, которое возникает под действием приложенных на бесконечности напряжений σ_{ij}^∞ . Второе решение соответствует напряженно-деформированному состоянию упругой плоскости, которое возникает под действием нагрузок $p_i^\pm = -\sigma_{ji}^\infty n_j$, приложенных к берегам трещин (напряжения на бесконечности в этом решении равны нулю). Поскольку получение первого решения не представляет трудностей — это однородное поле напряжений, основной задачей механики трещин является поиск решения второй задачи. Введем следующие обозначения: u_x, u_y — компоненты вектора перемещений; $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}$ — компоненты тензора напряжений; $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yy}$ — компоненты тензора деформаций; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона. Компоненты напряжений должны удовлетворять уравнениям равновесия и условию совместности деформаций [13]:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0, \quad \Delta(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0. \tag{1}$$

В плоских задачах теории упругости широко используются методы теории функций комплексного переменного [14]. В качестве комплексного аргумента выступает величина $z = x + iy$, где i — мнимая единица. В работе [14] показано, что уравнениям (1) удовлетворяют напряжения, представленные формулами Колосова–Мусхелишвили:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= 2(\phi'(z) + \overline{\phi'(z)}), \\ \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} &= 2(\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)), \end{aligned} \tag{2}$$

где $\phi(z), \psi(z)$ — голоморфные функции переменной $z = x + iy$, верхняя черта означает операцию комплексного сопряжения. При этом перемещения выражаются в следующей форме:

$$2\mu(u_x + iu_y) = k\phi(z) - z\overline{\phi'(z)} - \overline{\psi(z)}, \tag{3}$$

где $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ — модуль сдвига; $k = 3 - 4\nu$ для состояния плоской деформации, $k = \frac{3-\nu}{1+\nu}$ для плосконапряженного состояния.

Таким образом, решение краевой задачи сводится к определению двух функций $\phi(z), \psi(z)$ из граничных условий. Основой метода разрывных смещений является разложение искомых функций в ряды по некоторым базовым решениям теории упругости. В качестве базовых берутся решения двух краевых задач для прямолинейного граничного элемента.

Задача I

$$y = 0; \quad |x| < h: \quad [u_y] = D_y(x); \quad \sigma_{xy} = 0. \tag{4}$$

Задача II

$$y = 0; \quad |x| < h: \quad [u_x] = D_x(x); \quad \sigma_{yy} = 0. \tag{5}$$

Здесь знак скачка [...] используется в форме $[f] = f^+ - f^-$, где f^\pm — краевые значения функции для значений аргумента $y^\pm = 0$; D_x, D_y — скачки перемещений. Воспользуемся представлением Колосова–Мусхелишвили в случае плоской деформации (2), (3). В краевой задаче I воспользуемся представлением

$$\phi'(z) = \frac{1}{2}T'(z), \quad \psi'(z) = -\frac{z}{2}T''(z), \quad \psi(z) = -\frac{1}{2}zT'(z) + \frac{1}{2}T(z). \tag{6}$$

С учетом (6) выражения для напряжений и перемещений в (2) и (3) примут следующую форму:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \operatorname{Re} T'(z) - y \operatorname{Im} T''(z), & \sigma_{xy} &= -y \operatorname{Re} T''(z), & \sigma_{yy} &= \operatorname{Re} T'(z) + y \operatorname{Im} T''(z), \\ 2\mu u_x &= (1 - 2\nu) \operatorname{Re} T(z) - y \operatorname{Im} T'(z), & 2\mu u_y &= 2(1 - \nu) \operatorname{Im} T(z) - y \operatorname{Re} T'(z).\end{aligned}\quad (7)$$

Второе граничное условие в (4) выполняется автоматически, а первое приводит к решению краевой задачи для функции $T(z)$:

$$[\operatorname{Im} T(x)] = \frac{\mu}{1 - \nu} D_y(x), \quad |x| < h. \quad (8)$$

Аналогичные рассуждения проведем для краевой задачи II. Будем искать потенциалы в виде

$$\phi(z) = -\frac{1}{2} Q(z), \quad \psi(z) = -\frac{1}{2} (zQ(z))'. \quad (9)$$

В этом случае напряжения и перемещения в (2), (3) выразятся следующим образом:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= 2 \operatorname{Re} Q'(z) - y \operatorname{Im} Q''(z), & \sigma_{xy} &= -\operatorname{Im} Q'(z) - y \operatorname{Re} Q''(z), & \sigma_{yy} &= y \operatorname{Im} Q''(z), \\ 2\mu u_x &= 2(1 - \nu) \operatorname{Re} Q(z) - y \operatorname{Im} Q'(z), & 2\mu u_y &= (1 - 2\nu) \operatorname{Im} Q(z) - y \operatorname{Re} Q'(z).\end{aligned}\quad (10)$$

Ввиду (9) второе условие задачи (5) выполняется автоматически, а первое приводит к краевой задаче для функции $Q(z)$:

$$[\operatorname{Re} Q(x)] = \frac{\mu}{1 - \nu} D_x(x), \quad |x| < h. \quad (11)$$

Решение полученных краевых задач (8), (11) получается в форме интегралов типа Коши:

$$T(z) = \frac{\mu}{1 - \nu} \frac{1}{2\pi} \int_{-h}^h \frac{D_y(t)}{t - z} dt, \quad Q(z) = \frac{\mu}{1 - \nu} \frac{1}{2\pi i} \int_{-h}^h \frac{D_x(t)}{t - z} dt. \quad (12)$$

Отметим, что для достаточно широкого класса функций (например, для многочленов), представляющих плотность $D_x(t)$, $D_y(t)$ в интегралах (12), эти интегралы вычисляются в аналитической форме. Например, для квадратичной плотности $D_y(t) = at^2 + bt + c$ функция $T(z)$ будет иметь следующий вид:

$$T(z) = \frac{\mu}{2\pi(1 - \nu)} \left[2h(az + b) + (az^2 + bz + c) \ln \frac{z - h}{z + h} \right]. \quad (13)$$

На этой основе и строится численный метод разрывных смещений. Каждая из трещин заменяется последовательным набором линейных элементов (граничные элементы) заданной длины $2h$. Искомыми величинами являются функции плотности $D_x(t)$, $D_y(t)$ элемента. Для каждого элемента вводится своя локальная система координат (x, y) с началом в центре элемента. Для выбранного граничного элемента формулы (12), (7), (10) позволяют вычислить любую требуемую характеристику (напряжение или перемещение). Вычисляемая величина будет зависеть от выбранного функционального вида искомых величин $D_x(t)$, $D_y(t)$. При использовании многочленов эта зависимость от коэффициентов будет линейной (например, в случае квадратичной плотности имеем выражение (13), линейное относительно коэффициентов a, b, c). В методе граничных элементов нулевого порядка функции $D_x(t)$, $D_y(t)$ рассматриваются как константы [10]. Это является достаточно грубым приближением, поскольку вдоль границы любого берега трещины перемещения будут кусочно-непрерывны. Но даже в такой форме метод разрывных смещений позволяет получить приемлемые для практики результаты [15–17].

Обобщим метод, выбрав в качестве функционального вида плотности многочлен любой степени. Реализация метода состоит в получении замкнутой системы уравнений для неизвестных коэффициентов многочленов. Отметим, что любые решения типа (12) уже удовлетворяют уравнениям статики упругой среды. Их сумма также будет решением. Выполним граничные условия в центре каждого элемента. В плоских задачах это позволит получить два уравнения для каждого элемента или $2N$ уравнений в задаче с границей, состоящей из N элементов. Для метода нулевого порядка задача замкнута, поскольку для определения $2N$ неизвестных коэффициентов мы имеем $2N$ линейных

уравнений. В случае многочленов большей степени эти уравнения можно дополнить требованиями непрерывности плотности на границе соседних элементов. Если плотность не терпит разрыва на границе двух соседних элементов, метод будем называть методом первого порядка. Если непрерывна и первая производная плотности, имеем метод второго порядка и т.д. Нам удалось реализовать в виде программы методы нулевого, первого и второго порядка.

3. Численные результаты. Для тестирования и сравнения эффективности предложенных методов рассмотрим прямолинейную трещину длиной L , расположенную на оси x : $y = 0^\pm$, $|x| < l$. Трещина находится под действием постоянного давления p_0 , т.е. задача решается с граничными условиями $y = 0$, $|x| < l$, $l = \frac{L}{2}$, $\sigma_{yy} = -p_0$, $\sigma_{xy} = 0$. Эта задача имеет известное аналитическое решение (например, в [13]). Приведем аналитические выражения для смещений берегов трещины, т.е. u_y^\pm , $y = 0^\pm$, $|x| < l$:

$$|x| < l, \quad u_y(x, 0^\pm) = \pm \frac{p_0(1 - \nu)}{\mu} \sqrt{l^2 - x^2} \tag{14}$$

и для компоненты напряжений $\sigma_{yy}(x, 0)$ на продолжении трещины $y = 0$, $x > l$:

$$x > l, \quad \sigma_{yy}(x, 0) = p_0 \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - l^2}} - 1 \right). \tag{15}$$

На рис. 1 приведены графики зависимости компоненты перемещения u_y от координаты x для верхнего берега трещины единичной длины. Сплошная линия соответствует аналитическому решению (14), пунктир — решению методом нулевого порядка, штрихпунктир — решению методом первого порядка, кривая, изображенная точками, — решению методом второго порядка. Для анализа сходимости графики построены для двух разбиений: a — трещина разбита на 6 граничных элементов; b — трещина разбита на 20 граничных элементов. Достаточно отчетливо просматривается, что по перемещениям метод первого порядка значительно уступает даже методу нулевого порядка (как для 6, так и для 20 граничных элементов). Метод второго порядка с использованием даже малого количества элементов (в данном случае 6) описывает поле перемещений в окрестности трещины достаточно точно на основном участке, но имеет большую погрешность у краев трещины (рис. 2, a). Для более плотного разбиения (20 граничных элементов) погрешность уменьшается, но также максимальна на краях трещины (рис. 2, b).

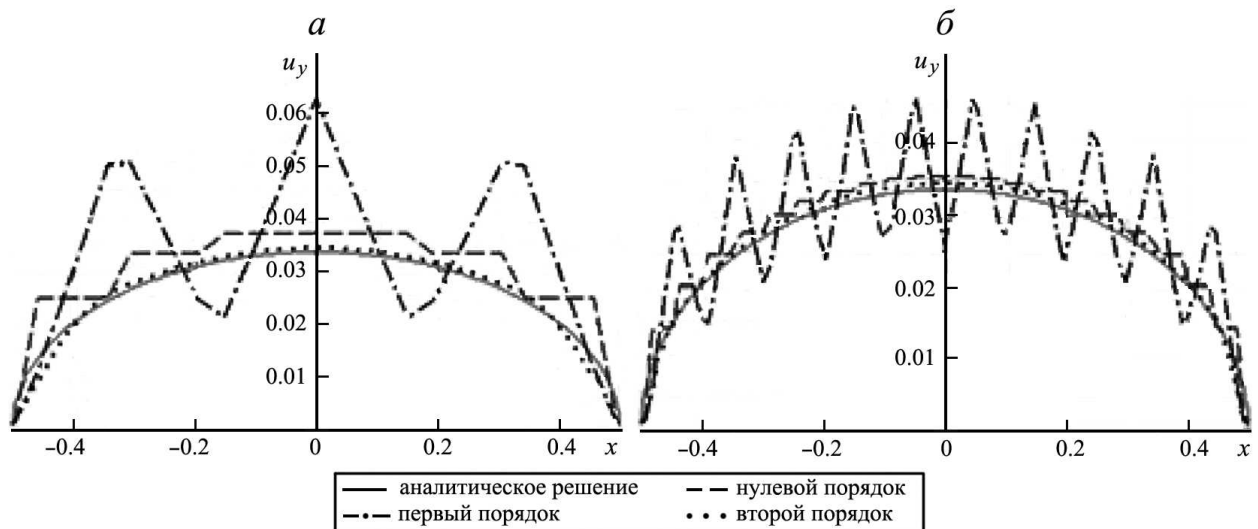


Рис. 1. Сравнение аналитического и численных решений, полученных на основе методов нулевого, первого и второго порядка: a — трещина разбита на 6 граничных элементов; b — на 20 граничных элементов. Параметры расчета: $\frac{p_0}{\mu} = 0.1$; $\nu = 0.33$; $l = 0.5$

На рис. 3, a построен график перемещения $u_y(x)$ для верхнего берега трещины с использованием разбиения трещины на 100 граничных элементов. Сплошная линия соответствует аналитическому решению (14), пунктир — методу нулевого порядка, кривая, изображенная точками, — методу второго порядка. С увеличением количества элементов до 100 максимальная ошибка уменьшилась. Для метода второго порядка максимум ошибки менее 3%.

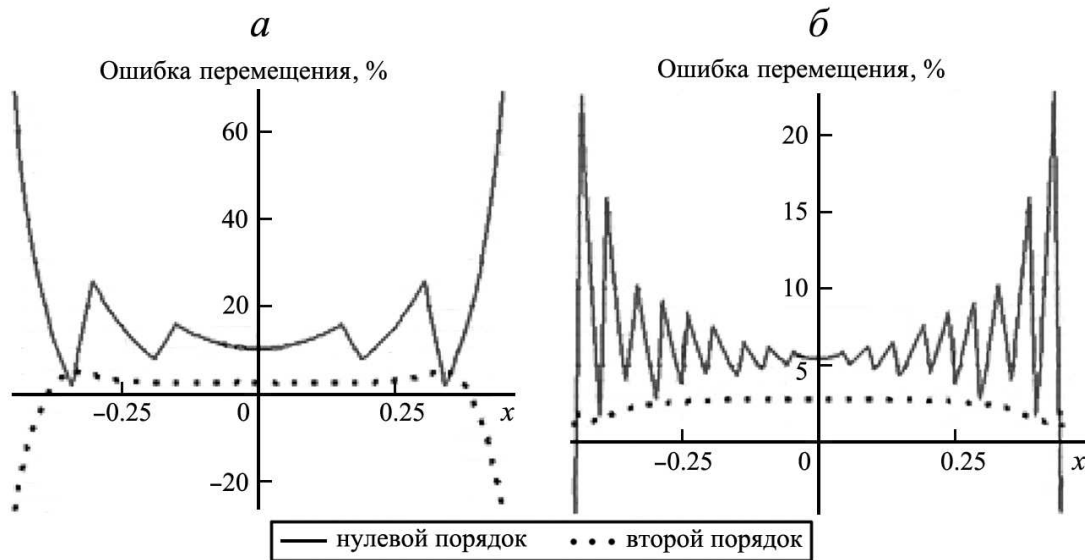


Рис. 2. Ошибка численных значений перемещения u_y для точек верхнего берега трещины относительно аналитических значений: a — 6 граничных элементов, b — 20 граничных элементов

Характерной чертой задач линейной механики разрушения является наличие особенностей на краях трещины. Напряжения в окрестности края трещины имеют особенность $\sigma \sim \frac{C}{\sqrt{s}}$, где s — расстояние от точки наблюдения до края трещины (в нашей задаче для края трещины $x = l$, $s = x - l$). Величины $K = \lim_{s \rightarrow 0} \sigma(s) \sqrt{2\pi s}$ называются коэффициентами интенсивности напряжений (КИН). В нашей задаче (трещина нормального отрыва) эту роль играет $K_I = \lim_{s \rightarrow 0} \sigma_{yy}(s) \sqrt{2\pi s}$. Силовым критерием начала роста трещины является равенство $K_I = K_I^*$, где K_I^* — критическая величина первого коэффициента интенсивности напряжений (константа для материала, в котором происходит рост трещины нормального отрыва). Определение КИН является основной задачей линейной механики разрушения. Именно эта задача наиболее трудна при реализации численного решения для сред с трещинами, поскольку достаточно точное определение этих коэффициентов связано с необходимостью создания специальных программ (измельчение сетки, использование нестандартных элементов и т.д.). С этой точки зрения метод разрывных смещений имеет неоспоримые преимущества, поскольку решение получается фактически в аналитической форме (конечный ряд по базисным функциям).

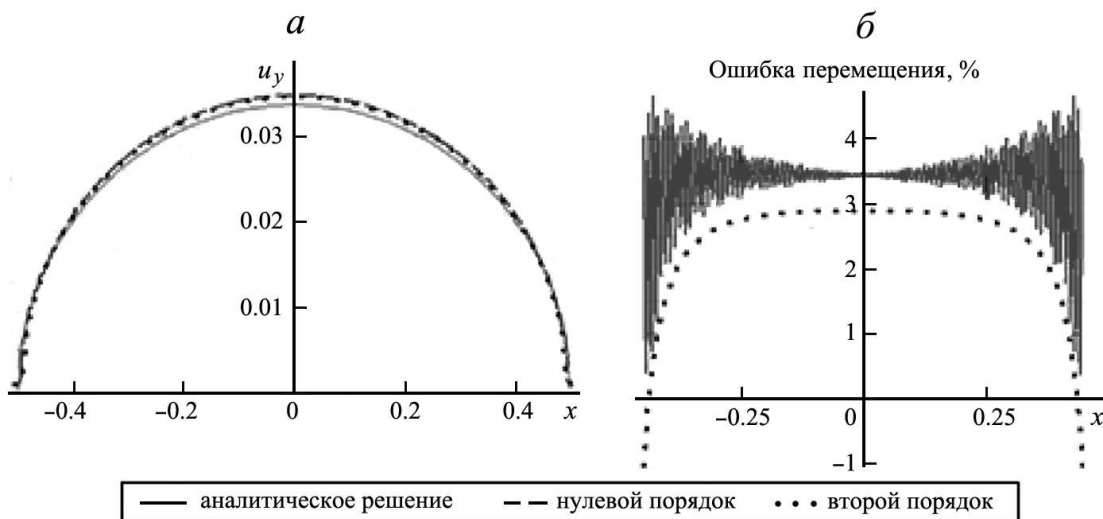


Рис. 3. График зависимости $u_y(x)$, полученный для разбиения на 100 граничных элементов (a), и ошибка для метода нулевого (сплошная линия) и второго (точки) порядка (b)

На рис. 4, a представлены графики аналитической зависимости $\sigma_{yy}(x)$, построенной по формуле (15), и численные результаты, полученные методами нулевого и второго порядка с использованием 70 граничных элементов. На первый взгляд мы наблюдаем очень хорошее совпадение, но в

окрестности края трещины $x = 0.5$ ошибка нарастает (рис. 4, б). Видно, что приемлемую точность $< 2\%$ имеет только метод второго порядка. Для трещины нормального отрыва (15) теоретическое значение $K_I = p_0\sqrt{\pi l}$. На рис. 5, а представлены последовательные численные значения K_I , найденные методом второго порядка точности для разных значений координаты x (расстояние до края трещины равно $s = x - l, l = 0.5$). Сплошная линия соответствует теоретическому значению K_I , кривая, изображенная точками, соответствует численному решению. На рис. 5, б дана зависимость относительной ошибки от координаты x . Расчеты произведены с разбиением трещины на 100 граничных элементов.

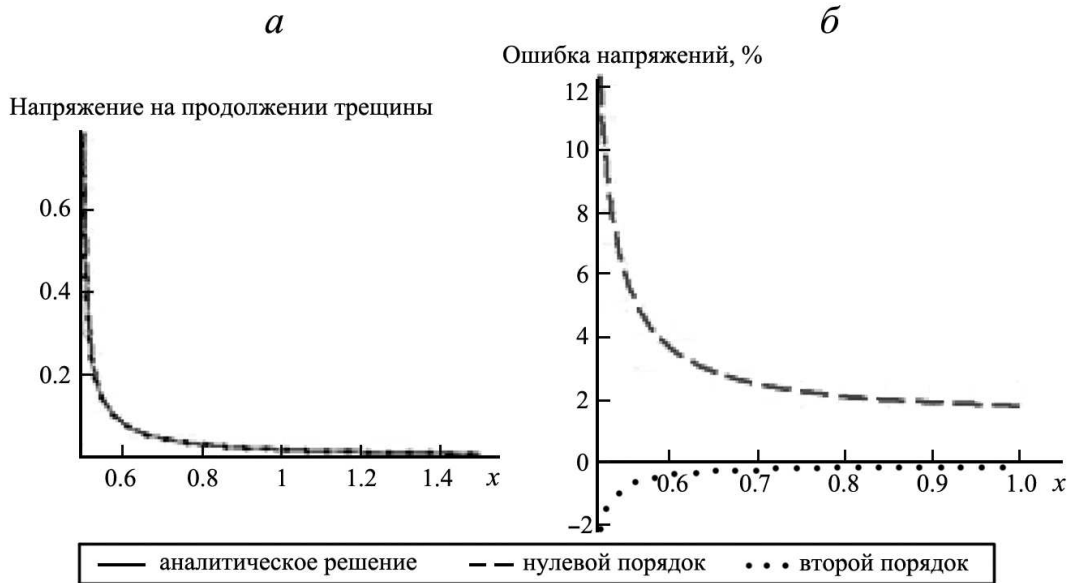


Рис. 4. График зависимости напряжения $\sigma_{yy}(x)$ на продолжении трещины $y = 0, x > l, l = 0.5$; сплошная линия — аналитическое решение; пунктир — численное решение, полученное методом нулевого порядка; кривая, изображенная точками, — решение методом второго порядка (а). Ошибка при сравнении численных и аналитических результатов (б)

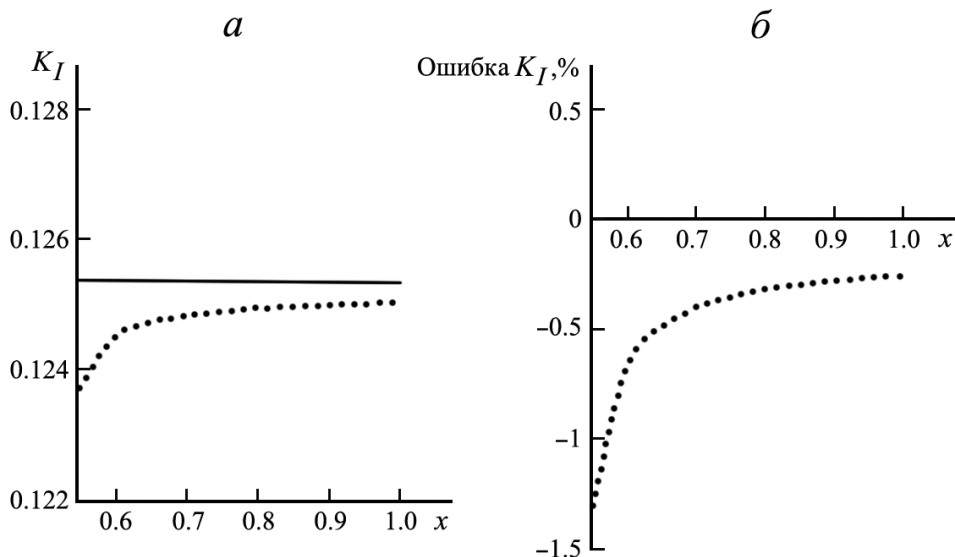


Рис. 5. Численные значения K_I , найденные методом второго порядка точности для разных значений координаты x (кривая, изображенная точками), и аналитическое значение (сплошная линия) (а). Относительная ошибка (б)

Можно утверждать, что при использовании метода второго порядка точности ошибка численного значения возрастает с уменьшением расстояния до края трещины, но не превышает 1.5%. Все численные значения коэффициента K_I оказались меньше его теоретического значения.

4. Заключение. Проведенное исследование эффективности методов разрывных смещений повышенного порядка точности позволяет сделать следующие выводы:

- 1) метод первого порядка точности приводит к существенно большей погрешности даже по сравнению с методом нулевого порядка точности, фактически он неработоспособен;
- 2) метод второго порядка точности имеет преимущества перед методом нулевого порядка как по точности, так и по числу элементов, необходимых для достижения заданной точности;
- 3) использование метода второго порядка точности позволяет эффективно определять коэффициенты интенсивности напряжений с заданной точностью (при разбиении трещины на 100 граничных элементов ошибка не превышает 1.5%).

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 19-07-01111.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Griffith A.A.* The phenomena of rupture and flow in solids // *Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A.* 1921. **221**. 163–198.
2. *Griffith A.A.* The theory of rupture // *Proc. First Int. Congress Appl. Mech. Delft, 1924.* 55–63.
3. *Orowan E.* Energy criteria of fracture // *Weld. J.* 1955. **34**, N 3. 1576–1606.
4. *Irwing G.R.* Fracture dynamics // *Fracturing in Metals.* Cleveland: ASM, 1948. 147–166.
5. *Rice J.* A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks // *J. Appl. Mech.* 1968. **35**. 379–386.
6. *Райс Дж.* Математические методы в механике разрушения // *Разрушение. Т. 2. Математические основы теории разрушения.* М.: Мир, 1975. 204–335.
7. *Cherepanov G.P.* Crack propagation in continuous media // *J. Appl. Math. and Mech.* 1967. **31**. 503–512.
8. *Slepyan L.I.* Models and phenomena in fracture mechanics. Berlin; Heidelberg; New York; Barcelona; Hongkong; London; Mailand; Paris; Tokio: Springer, 2002.
9. *Бенерджи П., Баттерфилд Р.* Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984.
10. *Крауч С., Старфилд А.* Методы граничных элементов в механике твердого тела. М.: Мир, 1987.
11. *Бреббия К., Уокер С.* Применение метода граничных элементов в технике. М.: Мир, 1982.
12. *Шифрин Е.И.* Пространственные задачи линейной механики разрушения. М.: Физматлит, 2002.
13. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975.
14. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
15. *Богданов А.И., Звягин А.В., Тьерсилен М.* Взаимное влияние системы трещин на коэффициент интенсивности напряжений // *Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ.* 2004. № 6. 44–49.
16. *Акулич А.В., Звягин А.В.* Численное моделирование распространения трещины гидроразрыва // *Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ.* 2008. № 1. 43–49
17. *Акулич А.В., Звягин А.В.* Взаимодействие трещины гидроразрыва с естественной трещиной // *Изв. РАН. Механ. жидкости и газа.* 2008. № 3. 104–112.

Поступила в редакцию
04.12.2019

УДК 531.36

БИФУРКАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ СИСТЕМЫ ТРЕХ СВЯЗАННЫХ ТЕЛ В ОДНОРОДНОМ ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

А. В. Карапетян¹, М. П. Чаплыгина²

Обсуждается задача о движении трех связанных твердых тел в однородном поле сил тяжести (обобщение задачи о движении гироскопа в кардановом подвесе). Найдены все стационарные движения системы, условия их устойчивости и ветвления. Результаты представлены в виде бифуркационных диаграмм.

¹ *Карапетян Александр Владиленович* — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. теоретической механики и мехатроники мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: avkarapetyan@yandex.ru.

² *Чаплыгина Мария Павловна* — студ. каф. теоретической механики и мехатроники мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: mariya14chapllygina@yandex.ru.

Karapetyan Alexander Vladilenovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Theoretical Mechanics and Mechatronics.

Chapllygina Mariya Pavlovna — Student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Theoretical Mechanics and Mechatronics.

Ключевые слова: стационарные движения, устойчивость, бифуркационные диаграммы.

The problem of motion of three connected rigid bodies in a homogeneous gravity force field (a generalization of the problem of motion of a gyroscope with gimbal suspension) is discussed. All steady motions of the system, their stability conditions and branching are found. The results are presented in the form of bifurcational diagrams.

Key words: steady motions, stability, bifurcational diagrams.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о движении системы трех связанных твердых тел в однородном гравитационном поле. Каждое из тел может вращаться только вокруг одной из своих осей: первое тело — вокруг неподвижной вертикали OZ , второе — вокруг горизонтали Ox , закрепленной на первом теле, а третье — вокруг оси Oz , закрепленной на втором теле (оси Ox и Oz ортогональны). Предположим, что оси Ox, Oy, Oz (ось Oy ортогональна плоскости Oxz) — главные оси инерции второго тела, причем ось Oz — ось симметрии эллипсоида инерции третьего тела для точки O , т.е. оси Ox, Oy, Oz — главные оси инерции и для третьего тела, хотя оси Ox и Oy не связаны жестко с этим телом.

Момент инерции первого тела относительно оси OZ обозначим через C_1 , а моменты инерции второго и третьего тел относительно осей Ox, Oy, Oz — через A_2, B_2, C_2 и $A_3, B_3 = A_3, C_3$ соответственно. Пусть центры масс второго и третьего тела лежат на оси Oz в точках с координатами c_2 и c_3 соответственно, а m_2 и m_3 — массы этих тел. Положительное направление оси Oz выбираем так, что $m_2c_2 + m_3c_3 = ms > 0$ (случай $m_2c_2 + m_3c_3 = 0$ тривиален и в статье не рассматривается).

Углы поворота первого, второго и третьего тел вокруг осей OZ, Ox и Oz обозначим через φ_1, φ_2 и φ_3 соответственно. Очевидно, конфигурационное пространство системы — трехмерный тор \mathbf{T}^3 .

2. Приведенный потенциал. Рассматриваемая система допускает интеграл энергии (g — ускорение свободного падения):

$$H = \frac{1}{2} ((B_2 + A_3) \sin^2 \varphi_2 + C_2 \cos^2 \varphi_2 + C_1) \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} (A_2 + A_3) \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2} C_3 (\dot{\varphi}_3 + \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_2)^2 + mgs \cos \varphi_2 = h \tag{1}$$

и два циклических интеграла:

$$\begin{aligned} K &= ((B_2 + A_3) \sin^2 \varphi_2 + C_2 \cos^2 \varphi_2 + C_1) \dot{\varphi}_1 + C_3 (\dot{\varphi}_3 + \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_2) \cos \varphi_2 = k, \\ L &= C_3 (\dot{\varphi}_3 + \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_2) = l. \end{aligned} \tag{2}$$

Приведенный потенциал $V_{k,l}(\varphi_2)$ определяется как минимум функции H по $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, \dot{\varphi}_3$ на фиксированных уровнях $K = k$ и $L = l$. Этот минимум достигается при [1]

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 &= \frac{k - l \cos \varphi_2}{J(\varphi_2)}, \quad \dot{\varphi}_2 = 0, \quad \dot{\varphi}_3 = \frac{(J(\varphi_2) + C_3 \cos^2 \varphi_2)l - C_3 k \cos \varphi_2}{C_3 J(\varphi_2)}, \\ J(\varphi_2) &= (B_2 + A_3 + C_1) + (C_2 - B_2 - A_3) \cos^2 \varphi_2. \end{aligned} \tag{3}$$

Подставляя значения (3) в функцию H (1), находим

$$V_{k,l}(\varphi_2) = mgs \cos \varphi_2 + \frac{1}{2} \frac{(k - l \cos \varphi_2)^2}{J(\varphi_2)} + \frac{1}{2} \frac{l^2}{C_3}.$$

Ранее [1] был рассмотрен случай $C_2 - B_2 - A_3 < 0$, характерный для задачи о движении гироскопа в кардановом подвесе. Рассмотрим теперь случай $C_2 - B_2 - A_3 > 0$, полагая, что $l \neq 0$ (случай $l = 0$ и $C_2 - B_2 - A_3 = 0$ тривиальны и в статье не рассматриваются). Заметим, что этот случай физически реализуем: пусть, например, масса второго тела сосредоточена в двух точках массы $\frac{m_2}{2}$ каждая, расположенных на оси Oy по разные стороны от точки O на расстоянии $d > 0$ от этой точки, тогда $C_2 = m_2 d^2, B_2 = 0$ и $C_2 - B_2 - A_3 = m_2 d^2 - A_3$ может принимать положительные значения.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} x &= \cos \varphi_2 \in [-1; 1], \quad a = \frac{k}{l} \in R, \quad b = (A_3 + B_2 + C_1)(C_2 - B_2 - A_3)^{-1} > 0, \\ p &= \frac{l^2}{r^2} > 0 \quad (r^2 = mgs(C_2 - B_2 - A_3)), \quad V_{k,l}(\varphi_2) = mgs f(x) + \text{const}, \quad f(x) = x + \frac{1}{2} p \frac{(x - a)^2}{x^2 + b}. \end{aligned} \tag{4}$$

Таким образом, задача поиска стационарных движений системы и исследования их устойчивости и ветвления сводится к задаче анализа критических точек функции $f(x)$ на отрезке $[-1, 1]$.

3. Вертикальные вращения и их устойчивость. Очевидно, $x = -1$ ($\varphi_2 = \pi$) и $x = 1$ ($\varphi_2 = 0$) — критические точки функции $f(x)$ (приведенного потенциала $V_{k,l}(\varphi_2)$). Этим точкам соответствуют стационарные движения системы, такие, что первое тело равномерно вращается вокруг вертикали OZ , второе тело неподвижно относительно первого, причем его ось Oz вертикальна, а третье тело равномерно вращается вокруг вертикально расположенной оси симметрии Oz (см. (3)). При этом центр масс занимает наинизшее положение при $x = -1$ и наивысшее при $x = 1$. Далее будем называть эти стационарные движения вертикальными вращениями. Устойчивые (неустойчивые) стационарные движения соответствуют точкам минимума (максимума) функции $f(x)$ [2]. Очевидно, $f(-1) = \min$ ($f(-1) = \max$), если $f'(-1) > 0$ ($f'(-1) < 0$), а $f(1) = \min$ ($f(1) = \max$), если $f'(1) < 0$ ($f'(1) > 0$). Здесь

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = 1 + p \frac{(x-a)(ax+b)}{(b+x^2)^2}, \quad f'(-1) = 1 - p \frac{(a+1)(b-a)}{(b+1)^2}, \quad f'(1) = 1 - p \frac{(a-1)(b+a)}{(b+1)^2}.$$

Таким образом, $f(-1) = \min$ при любом $p > 0$, если $a \leq -1$ или $a \geq b$, а также при $p \in (0, p_-)$, если $a \in (-1, b)$ (при $p > p_-$ $f(-1) = \max$). Аналогично $f(1) = \max$ при любом $p > 0$, если $a \in [-b, 1]$, а также при $p \in (0, p_+)$, если $a < -b$ или $a > 1$ (при $p > p_+$ $f(1) = \min$). Здесь

$$p_- = \frac{(b+1)^2}{(a+1)(b-a)}, \quad p_+ = \frac{(b+1)^2}{(a-1)(b+a)}.$$

Следовательно, вертикальные вращения системы при наинизшем положении центра масс всегда устойчивы, если $a \leq -1$ или $a \geq b$ ($\frac{k}{l} \leq -1$ или $\frac{k}{l} \geq b$), иначе медленные вращения устойчивы, а быстрые неустойчивы. Вертикальные вращения системы при наивысшем положении центра масс всегда неустойчивы, если $a \in [-b, 1]$ ($\frac{k}{l} \in [-b, 1]$), иначе медленные вращения неустойчивы, а быстрые устойчивы.

Заметим, что значения p_- и p_+ существуют (напомним, что $p > 0$) одновременно при $a \in (1, b)$, если $b > 1$, и при $a \in (-1, -b)$, если $b < 1$. При этом $p_+ > p_-$ ($p_+ < p_-$), если и только если $b > a^2$ ($b < a^2$) (при $b = a^2$ значения p_+ и p_- равны).

4. Прецессионные движения и их устойчивость. Критические точки $x_0 \in (-1, 1)$ функции $f(x)$ определяются из уравнения $f'(x) = 0$, которое можно представить в виде

$$p = u(x) = \frac{(b+x^2)^2}{(a-x)(ax+b)}, \quad (5)$$

поскольку $f'(x) = -\frac{(p-u(x))}{u(x)}$. При этом

$$f''(x_0) = \frac{u'(x_0)}{u(x_0)}. \quad (6)$$

Критические точки $x_0 = x(p) \in (-1, 1)$, где $x(p)$ — решение уравнения (5), соответствуют прецессионным движениям системы: первое тело равномерно вращается вокруг вертикали OZ , второе неподвижно относительно первого, а третье равномерно вращается вокруг оси симметрии Oz , составляющей постоянный угол с вертикалью (см. (3)). Заметим, что каждому значению $x(p) \in (-1, 1)$ соответствуют два прецессионных движения (два значения $\varphi_2(p) \neq 0, \pi$), поскольку $x(p) = \cos \varphi_2(p)$.

Параметр p может принимать только положительные значения (см. (4)). Следовательно, прецессионные движения существуют только при $u(x) > 0$, при этом они устойчивы (неустойчивы), если функция $u(x)$ возрастает (убывает) в точке $x_0 = x(p)$ (см. (6)). Очевидно, $u(x) > 0$, если и только если

$$(a-x)(ax+b) > 0. \quad (7)$$

Таким образом, прецессионные движения существуют при

- 1) $x \in (-1, 1)$, если $a > 1$, $b > a$;
- 2) $x \in (-\frac{b}{a}, 1)$, если $|a| > 1$, $b < |a|$;
- 3) $x \in (-1, a)$, если $|a| < 1$, $b > |a|$;
- 4) $x \in (-1, a) \cup (-\frac{b}{a}, 1)$, если $a \in (-1, 0)$, $b < -a$;
- 5) $x \in (-\frac{b}{a}, a)$, если $a \in (0, 1)$, $b < a$

(если $a \leq -1$, $b \geq -a$, то прецессионных движений нет).

В первом случае функция $u(x)$ ограничена на отрезке $[-1, 1]$ и прецессионные движения существуют на ограниченном интервале изменения параметра p . Если $u'(x) \neq 0$ при любом $x \in (-1, 1)$, то для $b > a^2$ ($b < a^2$) прецессионные движения существуют и устойчивы (неустойчивы) при $p \in (p_-, p_+)$ ($p \in (p_+, p_-)$). Если же найдется значение $x_* \in (-1, 1)$, такое, что $u'(x_*) = 0$, то прецессионные движения существуют для $b > a^2$ ($b < a^2$) при $p \in (p_*, p_+)$ ($p \in (p_*, p_-)$), где $p_* = u(x_*)$; при этом прецессионные движения устойчивы (неустойчивы) для $x(p) \in (x_*, 1)$ ($x(p) \in (-1, x_*)$). Других вариантов в первом случае нет (в п. 5 статьи будет доказано, что на каждом связном интервале области определения (7) функции $u(x)$ существует не более одной критической точки x_* этой функции). В точках $(-1; p_-)$, $(1; p_+)$ имеет место бифуркация ветвления, а в точках $(x_*; p_*)$ — бифуркации рождения. Во всех остальных случаях функция $u(x)$ не ограничена на области определения (7); при этом решения уравнения (5) при $p \rightarrow +\infty$ стремятся либо к $-\frac{b}{a}$ (во втором случае), либо к a (в третьем), либо и к $-\frac{b}{a}$, и к a (в четвертом и пятом случаях). Границы $x = 1$ (во втором случае), $x = -1$ (в третьем) и $x = \pm 1$ (в четвертом) соответствуют критическим значениям $p = p_+$ (для $x = 1$) и $p = p_-$ (для $x = -1$). При этом прецессионные движения ответвляются от соответствующих вертикальных вращений (имеет место бифуркация ветвления).

Если функция $u(x)$ монотонна на каждом связном интервале своей области определения, то решения $x(p)$ уравнения (5) во втором, третьем и четвертом случаях, ответвляющиеся от точки $x = 1$ ($x = -1$), существуют только при $p > p_+$ ($p > p_-$) и, следовательно, соответствующие прецессионные движения неустойчивы (устойчивы). В противном случае уравнение $u'(x) = 0$ имеет решение $x = x_*^+$ ($x = x_*^-$) на связном интервале области определения (7), примыкающем к точке $x = 1$ ($x = -1$); при этом прецессионные движения существуют при $p > p_*^+$ ($p > p_*^-$), где $p_*^\pm = u(x_*^\pm)$. Согласно (6) прецессионные движения, соответствующие решениям $x(p) \in (x_*^+, 1)$ для $p \in (p_*^+, p_+)$ ($x(p) \in (-1, x_*^-)$ для $p \in (p_*^-, p_-)$), устойчивы (неустойчивы), а решениям $x(p) \in (-\frac{b}{a}, x_*^+)$ для $p > p_*^+$ ($x(p) \in (x_*^-, a)$ для $p > p_*^-$) — неустойчивы (устойчивы). Точки $(x_*^\pm; p_*^\pm)$ соответствуют бифуркации рождения.

В пятом случае бифуркаций ветвления нет. При этом для всех $p > p_*$ уравнение (5) имеет два решения $x = x^\pm(p)$: одно из них существует при $x \in (x_*, a)$, а другое — при $x \in (-\frac{b}{a}, x_*)$, причем при $p \rightarrow +\infty$ $x^+(p)$ стремится к a , а $x^-(p)$ — к $-\frac{b}{a}$. Здесь, как и ранее, x_* — решение уравнения $u'(x) = 0$ на интервале $(-\frac{b}{a}, a)$, $p_* = u(x_*)$. Прецессионные движения, соответствующие решению $x^+(p)$, устойчивы, а решению $x^-(p)$ — неустойчивы. Точке $(x_*; p_*)$ соответствует бифуркация рождения.

5. Параметрический анализ задачи. Выше было показано, что основные свойства прецессионных движений (количество ветвей, устойчивость, бифуркации) существенно зависят от свойств функции $u(x)$. Производная этой функции имеет вид

$$u'(x) = \frac{(b + x^2)}{(a - x)^2(ax + b)^2} v(x),$$

$$v(x) = -2ax^3 + 3(a^2 - b)x^2 + 6abx + b(b - a^2).$$

Пусть $a \neq 0$ (случай $a = 0$, т.е. $k = 0$, тривиален и в статье не рассматривается). Тогда

$$v'(x) = -6a(x - a)\left(x + \frac{b}{a}\right), \quad v(a) = b + a^2 > 0, \quad v\left(-\frac{b}{a}\right) = -b(b + a^2)a^{-2}.$$

Если $a > 0$, то функция $v(x)$ положительна при $x \in (-\infty, x_1^+) \cup (x_2^+, x_3^+)$, причем $x_1^+ < -\frac{b}{a}$, $x_3^+ > a$, $x_2^+ \in (-\frac{b}{a}, 0)$ для $b > a^2$ и $x_2^+ \in (0, a)$ для $b < a^2$. Если же $a < 0$, то $v(x) > 0$ при $x \in (x_1^-, x_2^-) \cup (x_3^-, +\infty)$, причем $x_3^- > -\frac{b}{a}$, $x_1^- < a$, $x_2^- \in (0, -\frac{b}{a})$ для $b > a^2$ и $x_2^- \in (a, 0)$ для $b < a^2$.

Таким образом, точки смены знака функции $v(x)$ (т.е. точки смены участков возрастания/убывания функции $u(x)$) зависят только от значений функции $v(x)$ в точках $x = \pm 1$ (напомним, что для прецессионных движений $x \in (-1, 1)$). Вычисляя $v(\pm 1)$, имеем

$$v(\pm 1) = (3 - b)a^2 \pm 2a(3b - 1) + b(b - 3).$$

Если $b = 3$, то значение $v(\pm 1) = \pm 16a$ положительно при $\pm a > 0$ и отрицательно при $\pm a < 0$. Если же $b \neq 3$, то

$$v(\pm 1) = (3 - b)(a \mp a_1)(a \mp a_2),$$

$$a_1 = \frac{3b - 1 + (b + 1)^{\frac{3}{2}}}{b - 3}, \quad a_2 = \frac{3b - 1 - (b + 1)^{\frac{3}{2}}}{b - 3},$$

причем $a_1 < a_2$ ($a_1 > a_2$) при $b > 3$ ($b < 3$).

Итак, если $v(1) > 0$ ($v(1) < 0$), то решение $x(p)$ уравнения (5), примыкающее при $p \rightarrow p_+$ к точке $x = 1$, ответвляется от этой точки в сторону уменьшения (увеличения) параметра p ; при этом существует (отсутствует) точка, в которой $u'(x)$ обращается в нуль. Если $v(-1) > 0$ ($v(-1) < 0$), то решение $x(p)$ уравнения (5), примыкающее при $p \rightarrow p_-$ к точке $x = -1$, ответвляется от этой точки в сторону увеличения (уменьшения) параметра p ; при этом отсутствует (существует) точка, в которой $u'(x)$ обращается в нуль.

Проведенный анализ позволяет дать полный атлас бифуркационных диаграмм Пуанкаре–Четаева [3, 4]. Каждая карта этого атласа представляет собой на плоскости $(p; x)$ совокупность всех критических точек функции $f(x)$ на отрезке $[-1, 1]$, т.е. состоит из прямых $x = \pm 1$ и кривых $x(p)$, соответствующих решениям уравнения (5). Карты различаются видом кривых $x(p)$ и распределением точек минимума/максимума на этих кривых и прямых $x = \pm 1$.

Для построения полного атласа бифуркационных диаграмм Смейла [5] необходимо провести дополнительный анализ. Каждая карта этого атласа представляет собой на плоскости $(p; q)$, где $q = (h - \frac{I^2}{2C_3})/mgs$, совокупность кривых $q = q(p) = f(x(p))$ и прямых

$$q = f(-1) = -1 + \frac{(a+1)^2}{2(b+1)} p, \quad q = f(1) = 1 + \frac{(1-a)^2}{2(b+1)} p. \quad (8)$$

Эта совокупность определяет бифуркационное по Смейлу множество, на котором происходят перестройки топологического типа областей возможности движения, определяемых соотношением $f(x) \leq q$ ($V_{k,l}(\varphi_2) \leq h$). При $a < 0$ прямые (8) не пересекаются, а при $a > 0$ пересекаются, когда $p = p_0 = \frac{b+1}{a}$. Взаимное расположение точек p_0 и p_{\pm} влияет на вид бифуркационной диаграммы Смейла. Очевидно, $p_+ > p_0$ ($p_+ < p_0$) при $b > a^2 - 2a$ ($b < a^2 - 2a$), а $p_- > p_0$ ($p_- < p_0$) при $b < a^2 + 2a$ ($b > a^2 + 2a$).

В заключение отметим, что при $x(p) \rightarrow a$ кривая $q(p)$ стремится к прямой (горизонтальная асимптота) $q = f(a) = a$, а при $x(p) \rightarrow -\frac{b}{a}$ — к прямой (наклонная асимптота)

$$q = f\left(-\frac{b}{a}\right) = -\frac{b}{a} + p \frac{a^2 + b}{2b}. \quad (9)$$

Очевидно, угол наклона прямой (9) больше углов наклона прямых (8).

6. Бифуркационные диаграммы. Проведенный параметрический анализ позволяет разбить область параметров задачи a и b на 24 области (рис. 1), различающиеся видом бифуркационных диаграмм Смейла. Для бифуркационных диаграмм Пуанкаре–Четаева расположение точек p_0 и p_{\pm} не имеет значения (области 1 и 2, 5 и 6, 7 и 8, 11 и 12 можно объединить).

Приведем диаграммы Пуанкаре–Четаева (слева) и Смейла (справа) для 5 (соответственно из 20 и 24) областей, поясняя, как они изменяются при переходе параметров в другие области (см. рис. 2–6).

На этих диаграммах знаком “плюс” помечены устойчивые, а знаком “минус” — неустойчивые движения.

6.1. Диаграммы Пуанкаре–Четаева. Диаграмма для области 2 совпадает с диаграммой для области 1, приведенной на рис. 2; диаграмма для области 3 отличается от приведенной на этом рисунке тем, что кривая $x(p)$ существует только при $p > p_+$ ($x(p_+) = 1$), и все прецессионные движения неустойчивы; диаграммы для областей 24 и 23 получаются соответственно из диаграмм для областей 1 и 3 смещением асимптоты $x = -\frac{b}{a}$ в верхнюю полуплоскость.

Диаграмма для области 8 совпадает с диаграммой для области 7, приведенной на рис. 3; диаграмма для областей 5 и 6 получается из приведенной перемещением точки p_- правее точки p_+ ; для областей 9 и 4 прецессионные движения существуют только при $p \in (p_-, p_+)$ и $p \in (p_+, p_-)$ соответственно ($x(p_{\pm}) = \pm 1$), и, следовательно, все прецессии для области 9 устойчивы, а для области 4 неустойчивы.

Диаграмма для области 11 совпадает с диаграммой для области 12, приведенной на рис. 4; диаграмма для области 10 отличается от приведенной тем, что прецессионные движения существуют только при $p > p_-$ ($x(p_-) = -1$) и, следовательно, устойчивы; диаграммы для областей 20 и 21 получаются из диаграмм для областей 12 и 10 смещением асимптоты $x = a$ в нижнюю полуплоскость.

Диаграмма для области 22 получается из диаграммы для области 13, приведенной на рис. 5, если из нее удалить кривые $x(p) \in (-\frac{b}{a}, a)$ (в области 22 прецессионных движений нет).

Диаграмма для области 16 получается из диаграммы для области 15, приведенной на рис. 6, перемещением точки p_- правее точки p_+ , а диаграммы для областей 14, 17–19 отличаются от той

же диаграммы на рис. 6 отсутствием прецессионных движений при $p \in (p_*, p_+)$ для области 14 или при $p \in (p_*, p_-)$ для области 17, а также и тех и других для областей 18 ($p_+ < p_-$) и 19 ($p_+ > p_-$).

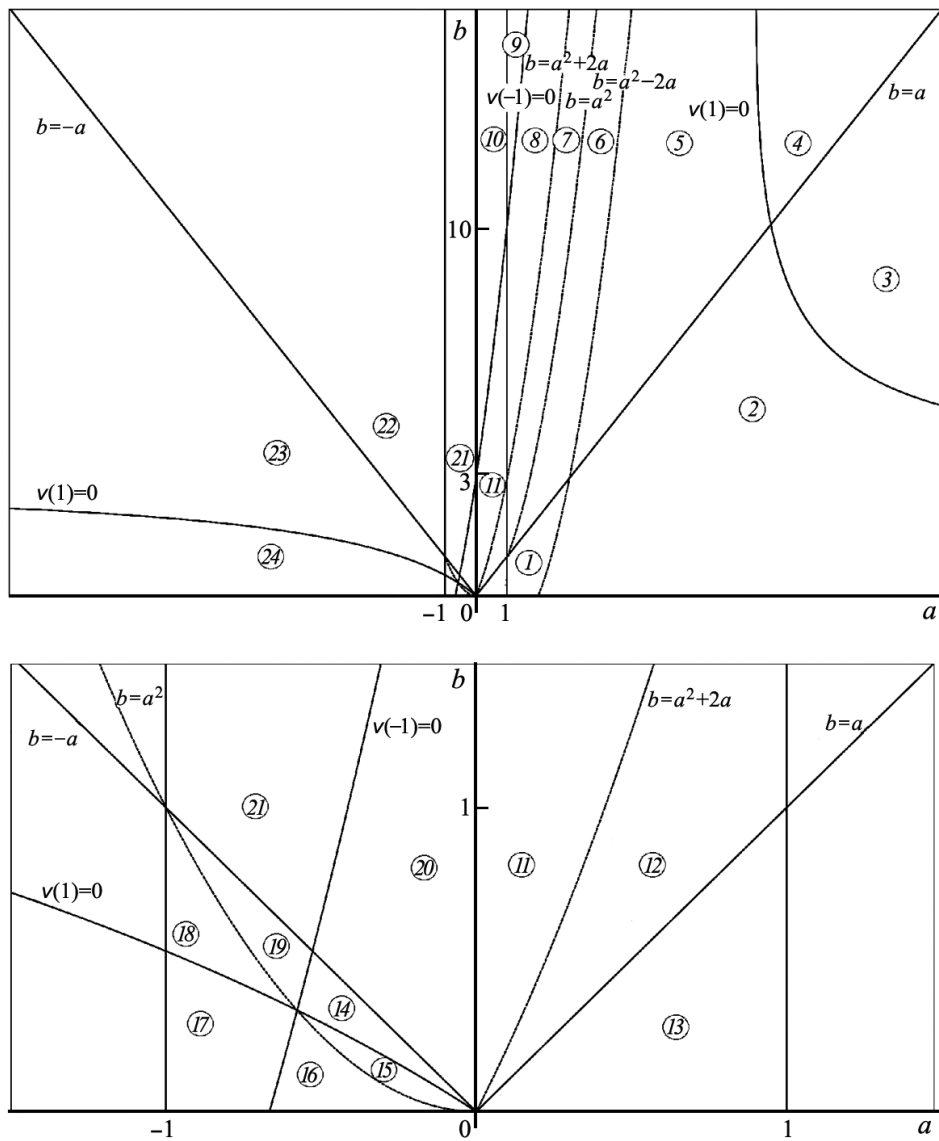


Рис. 1. Плоскость параметров a и b

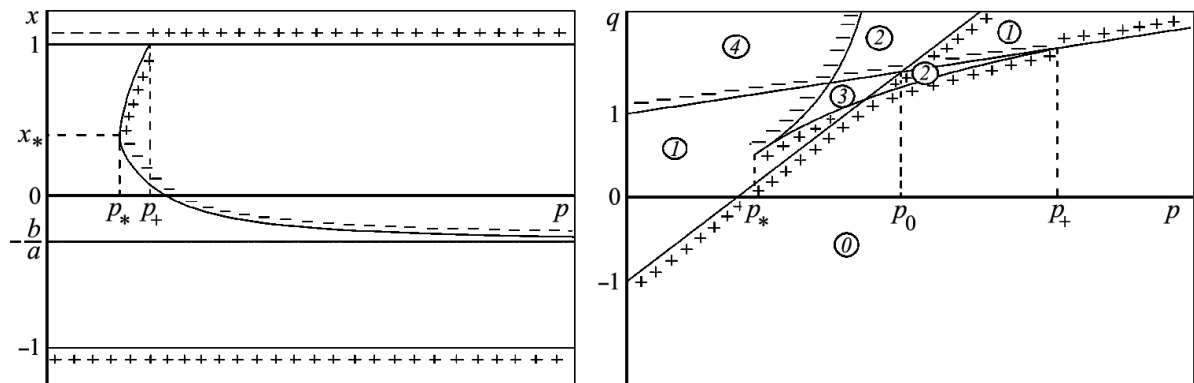


Рис. 2. Область 1: $a > 1, b \in (a^2 - 2a, a)$

6.2. *Диаграммы Смейла.* Аналогичным образом бифуркационные диаграммы Смейла для областей 1, 7, 12, 13, 15, приведенные на рис. 2–6, трансформируются соответственно для областей

$\{2, 3, 24, 23\}, \{4-6, 8, 9\}, \{10, 11, 20, 21\}, \{22\}, \{14, 16-19\}$. На этих диаграммах символами (0), (1), (2), (3), (4) обозначены топологические типы областей возможности движения: (0) — пустое множество, (1), (2) или (3) — один, два или три “толстых” двумерных тора (для приведенной по Раусу системы — один, два или три отрезка); (4) — трехмерный тор (для приведенной системы — окружность). Здесь “толстый” двумерный тор — это полноторие двумерного тора с вырезанным из него полноторием концентрического двумерного тора меньшего размера.

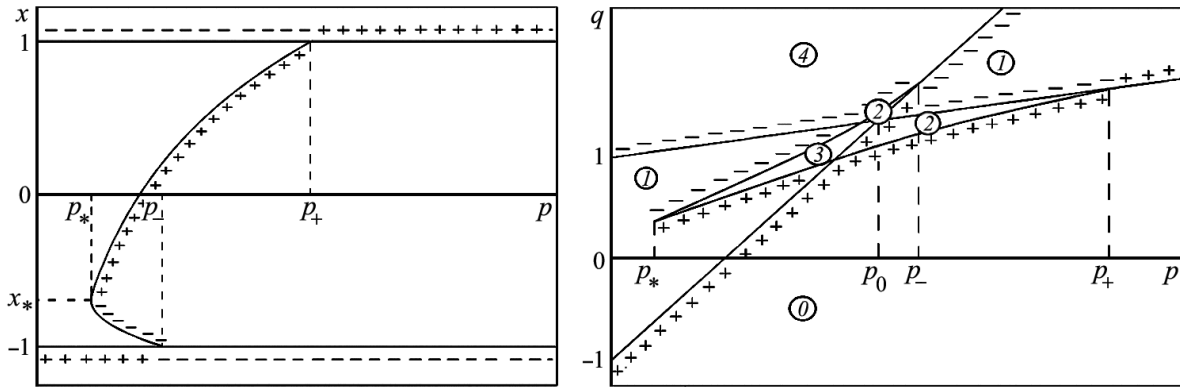


Рис. 3. Область 7: $a > 1, b \in (a^2, a^2 + 2a)$

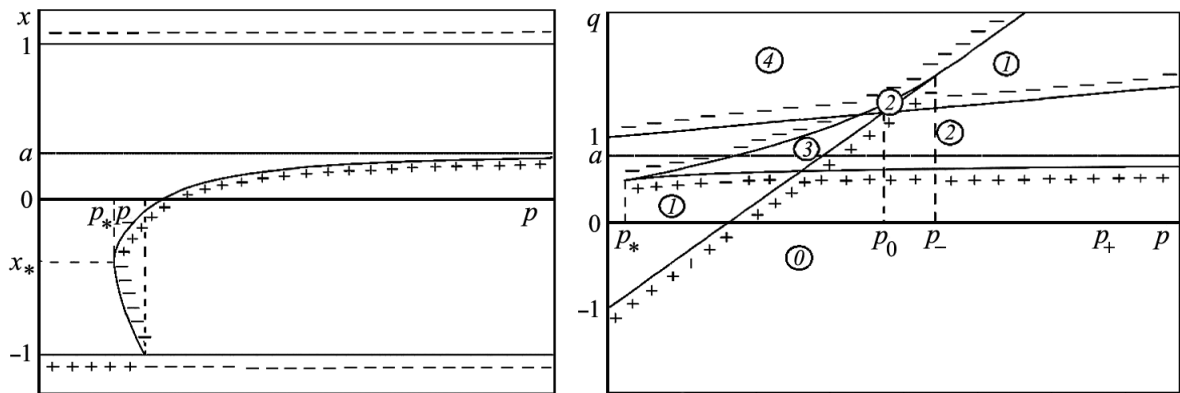


Рис. 4. Область 12: $a \in (0, 1), b \in (a, a^2 + 2a)$

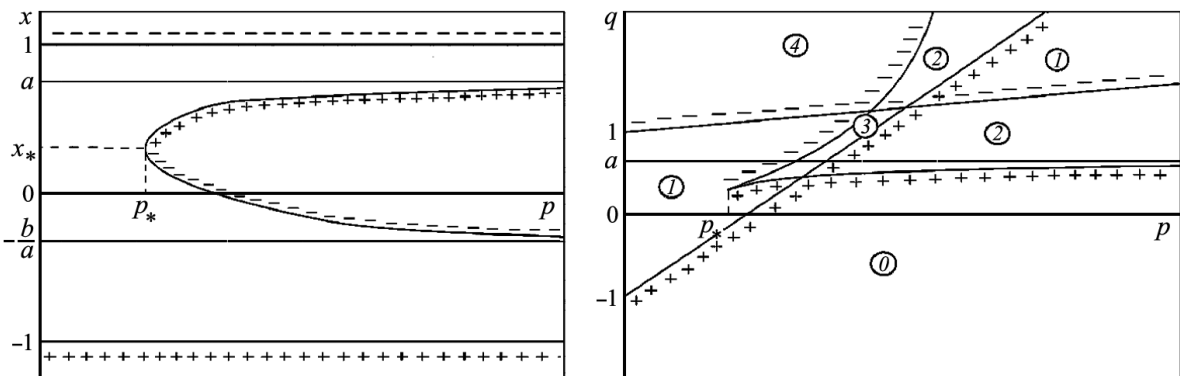


Рис. 5. Область 13: $a \in (0, 1), b \in (0, a)$

В заключение отметим, что для параметров задачи, лежащих в областях 15 и 16, существует конечное значение $\delta > 0$, такое, что для всех $p \in [a^2 - \delta, a^2 + \delta]$ при одном и том же значении параметра p существует 10 стационарных движений: два вертикальных вращения (одно устойчивое и одно неустойчивое) и четыре пары прецессионных движений (две пары устойчивых и две пары неустойчивых), см. рис. 6 (для $p \in (p_*, p_-)$).

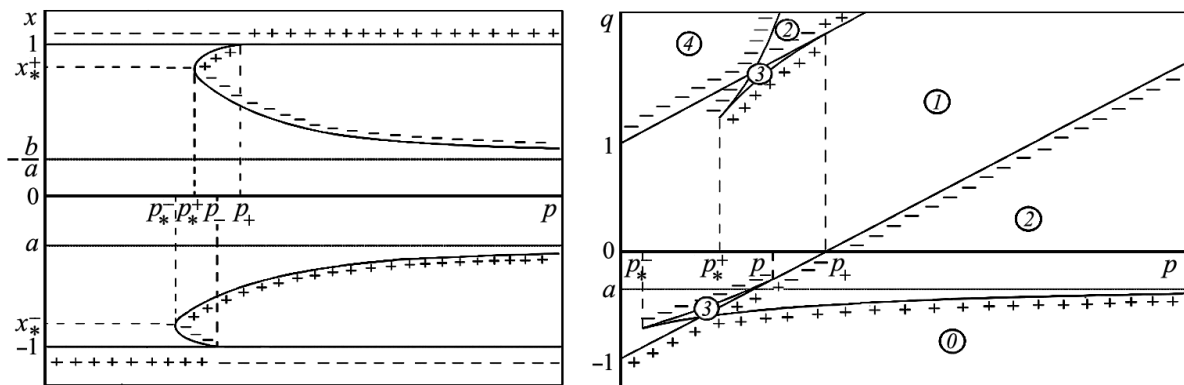


Рис. 6. Область 15: $a \in (-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$, $b > a^2$, $(3 - b)a^2 + 2a(3b - 1) + b(b - 3) > 0$

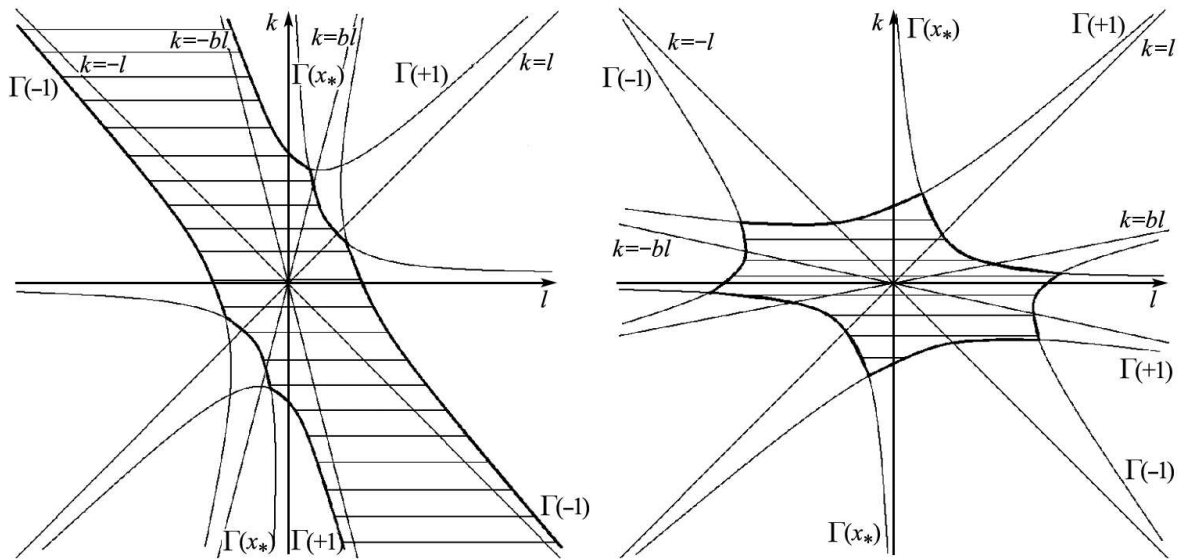


Рис. 7. Область существования прецессий

6.3. *Области существования прецессионных движений на плоскости констант циклических интегралов.* Рассмотрим плоскость $(l; k)$ постоянных интегралов (2). Прецессионные движения определяются из уравнения (5), которое можно представить в виде

$$k^2x + kl(b - x^2) - bl^2x = r^2(b + x^2)^2. \tag{10}$$

При каждом допустимом значении $x \in (-1, 1)$ соотношение (10) определяет на плоскости $(l; k)$ гиперболу $\Gamma(x)$. Совокупность всех этих гипербол задает на этой плоскости области существования прецессионных движений.

Если прецессионные движения отвечают от вертикальных вращений, соответствующих $x = \pm 1$, то границы областей существования таких прецессионных движений состоят из гипербол (или их частей) $\Gamma(\pm 1)$, определяемых формулами

$$\pm k^2 + kl(b - 1) \mp bl^2 = r^2(b + 1)^2. \tag{11}$$

Если бифуркаций рождения нет, то границы областей существования таких прецессионных движений состоят только из гипербол (11) или их частей. Если же бифуркации рождения есть, то границы соответствующих прецессионных движений включают части гиперболы $\Gamma(x_*)$, где x_* — критическая точка функции $u(x)$. Эти точки определяются из уравнения $v(x) = 0$, т.е. удовлетворяют соотношению

$$(3x_*^2 - b)k^2 + 2klx_*(3b - x_*^2) + b(b - 3x_*^2)l^2 = 0. \tag{12}$$

С учетом соотношения (12) уравнение гиперболы $\Gamma(x_*)$ можно представить в виде

$$kl = r^2(b - 3x_*^2). \tag{13}$$

Покажем, что правая часть соотношения (13) всегда положительна. Вычисляя значение функции $v(x)$ в точках $x = 0$ и $x = \pm\sqrt{\frac{b}{3}}$, имеем

$$v(0) = b\left(b - \frac{k^2}{l^2}\right), \quad v\left(\pm\sqrt{\frac{b}{3}}\right) = \pm\frac{16b}{\sqrt{3}}\frac{k}{l}.$$

Если $b > \frac{k^2}{l^2}$, то $v(0) > 0$, при этом $v(-\sqrt{\frac{b}{3}}) < 0$ для $kl > 0$, а $v(\sqrt{\frac{b}{3}}) < 0$ при $kl < 0$; если же $b < \frac{k^2}{l^2}$, то $v(0) < 0$, при этом $v(\sqrt{\frac{b}{3}}) > 0$ для $kl > 0$, а $v(-\sqrt{\frac{b}{3}}) > 0$ при $kl < 0$, т.е. в любом случае $|x_*| < \sqrt{\frac{b}{3}}$ ($x_* = 0$ при $b = \frac{k^2}{l^2}$). Таким образом, гипербола $\Gamma(x_*)$ существует только при $kl > 0$.

Следовательно, области существования прецессионных движений на плоскости $(l; k)$ имеют вид, представленный на рис. 7 (слева для случая $b > 1$, справа для случая $b < 1$). Области существования прецессионных движений не заштрихованы (в заштрихованной части плоскости констант циклических интегралов прецессий нет).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 19-01-00140.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Карпетян А.В., Чаплыгина М.П.* Бифуркационный анализ динамики гироскопа в кардановом подвесе // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2019. № 3. 73–76.
2. *Карпетян А.В.* Устойчивость стационарных движений. М.: УРСС, 1998.
3. *Poincaré H.* Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation // Acta Math. 1885. 7. 259–380.
4. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962.
5. *Smale S.* Topology and mechanics // Invent. Math. 1970. 10. 305–314; 11. 45–64.

Поступила в редакцию
19.06.2019

УДК 533.6.011

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ МЕТЕОРОВ ПРИ ПЕРЕМЕННОМ ПАРАМЕТРЕ АБЛЯЦИИ

Г. А. Тирский¹, И. Г. Брыкина², С. В. Жлуктов³

Получено приближенное аналитическое решение уравнений физической теории метеоров при постоянном параметре абляции для изменения вдоль траектории скорости и массы метеороида, движущегося как единое тело. Оценена точность этого решения. Предложен численно-аналитический метод решения уравнений при переменном параметре абляции. Проведено сравнение решений при постоянном и переменном параметре абляции, полученных разными методами.

Ключевые слова: метеороид, параметр абляции, унос массы, аналитическое решение.

An approximate analytical solution of the equations of the physical theory of meteors is obtained for a meteoroid moving as a single body under the assumption of constant ablation

¹ *Тирский Григорий Александрович* — доктор физ.-мат. наук, гл. науч. сотр. НИИ механики МГУ, e-mail: tirskey@imech.msu.ru.

² *Брыкина Ирина Григорьевна* — доктор физ.-мат. наук, вед. науч. сотр. НИИ механики МГУ, e-mail: shantii@mail.ru.

³ *Жлуктов Сергей Васильевич* — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр., Объединенный институт высоких температур РАН, e-mail: sz@flowvision.ru.

Tirskiy Grigoriy Aleksandrovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Principal Scientific Researcher, Lomonosov Moscow State University, Institute of Mechanics.

Brykina Irina Grigorievna — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Leading Scientific Researcher, Lomonosov Moscow State University, Institute of Mechanics.

Zhlukov Sergey Vasilievich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Scientific Researcher, Joint Institute for High Temperatures of the Russian Academy of Sciences.

parameter. The approach allows one to predict the velocity and mass of the meteoroid at any point of its trajectory. The accuracy of the solution is estimated. A numerical-analytical method of solving the equations is proposed for the case when the ablation parameter is variable. The solutions obtained by different methods with constant and variable ablation parameters are compared.

Key words: meteoroid, ablation parameter, mass loss, analytical solution.

Введение. Большие скорости входа космических тел в атмосферу Земли порождают процессы, не проявляющиеся при обтекании космических аппаратов. При моделировании взаимодействия крупного метеороида с атмосферой возникают три основные проблемы: 1) моделирование его разрушения; 2) моделирование абляции; 3) необходимость решать обратную задачу, поскольку основные параметры входа в атмосферу неизвестны. Задача моделирования взаимодействия метеороида с атмосферой заключается в том, чтобы, разработав подходящий сценарий разрушения и модель абляции, воспроизвести траекторию и наблюдаемую световую кривую метеороида и таким образом оценить его начальную массу и размер, а также массу и области выпадения метеоритов. Процессы движения и абляции метеороида в атмосфере обычно моделируются с использованием системы обыкновенных дифференциальных уравнений физической теории метеоров (ФТМ) [1] — уравнения траектории и уравнений для скорости единого тела и уноса его массы вдоль траектории.

Большинство входящих в атмосферу космических тел разрушается под действием аэродинамических нагрузок, возрастающих по мере проникновения в более плотные слои атмосферы. Космические тела имеют разные скорости, состав, структуру, размер и прочность и разрушаться могут по-разному. Поэтому в последние годы разрабатываются различные подходы и модели разрушения. Один подход основан на предположении, что фрагменты раздробленного метеороида движутся независимо друг от друга, каждый со своей ударной волной. Предполагается либо одна, либо несколько последовательных стадий дробления — модели прогрессивной фрагментации, дискретной (см., например, [2, 3]) или непрерывной (см., например, [4, 5]). В другом подходе предполагается, что тело дробится на облако фрагментов и паров, объединенных общей ударной волной, движется как единое тело и деформируется под действием аэродинамических нагрузок [6–9]. В последнее время с целью совпадения с данными наблюдений используются комбинации разных подходов [10–14].

Под действием сильных тепловых потоков, главным образом радиационных в случае крупных тел, метеороид плавится, испаряется и теряет большую часть своей массы. Для моделирования абляции, во-первых, необходимо знать радиационный тепловой поток к поверхности тела. Во-вторых, для решения уравнения ФТМ следует представить его в виде аналитической зависимости от скорости тела, его размера и плотности атмосферы. Это очень сложная проблема во многом из-за того, что большинство исследований по радиационному нагреву посвящено теплообмену возвращаемых космических аппаратов и область рассматриваемых в них скоростей и размеров тел весьма ограничена. Поэтому практически во всех работах, где решаются уравнения ФТМ, коэффициент теплопередачи и соответственно зависящий от него параметр абляции σ полагаются постоянными (или ступенчатыми функциями). Обычно σ подбирается так, чтобы результаты расчетов соответствовали данным наблюдений за полетом и свечением космических тел. А при постоянном параметре σ уравнения ФТМ имеют аналитическое решение, представляющее в неявном виде массу и скорость метеороида в зависимости от определяющих параметров. В подавляющем большинстве работ метеорной тематики используются эти аналитические решения и нет необходимости решать дифференциальные уравнения и применять численные методы, например метод Рунге–Кутты.

Метод Рунге–Кутты имеет смысл использовать при переменном параметре абляции и при рассмотрении движения единого тела или небольшого числа фрагментов. Так, этим методом решалась задача о взаимодействии Челябинского метеороида с атмосферой на основе разработанной модели разрушения на облако фрагментов, движущихся совместно [15]. При этом решалась система 7 уравнений (из них 4 дифференциальных).

В случае же разрушения метеороида на множество (N) фрагментов с разной массой, движущихся независимо, когда для каждого фрагмента необходимо решать систему 4 уравнений (из них 3 дифференциальных), т.е. необходимо решать $4N$ уравнений, а затем находить суммированием общую массу, энерговыделение и светимость, прибегать к методу Рунге–Кутты уже не так удобно. И совсем нецелесообразно применять его при использовании недавно разработанной модели разрушения метеороида [16] для независимого движения фрагментов, когда задается вероятностное распределение осколков по массам, полученное на основе результатов многочисленных экспериментов по разрушению тел при высокоскоростном ударе. В этом случае общая масса, энерговыделение

и светимость раздробленного метеороида находятся интегрированием по начальным массам осколков, под интегралом стоят функции от текущей массы и скорости, которые в свою очередь зависят от начальной массы.

При дроблении метеороида на множество фрагментов с разными массами, с дискретным и особенно с непрерывным распределением их по массам, значительно удобнее применять аналитическое решение, например простое, полученное в настоящей работе. А в случае переменного параметра абляции никаких трудностей не вызывает применение предложенного в работе “численно-аналитического” метода, просто при движении по траектории следует брать параметр абляции с предыдущего шага. Поскольку параметр абляции меняется медленно, шаг по плотности атмосферы (или по высоте) может быть довольно большим. Метод позволяет использовать полученные ранее при постоянном параметре абляции аналитические решения в случае переменного параметра абляции.

Аналитические решения уравнений ФТМ при постоянном параметре абляции. Основные уравнения ФТМ [1] — уравнения торможения и абляции метеороида, движущегося как единое тело, и уравнение прямолинейной траектории можно привести к виду

$$M \frac{dV}{d\rho} = -\frac{1}{2} \frac{AC_D h V}{\sin \theta}, \quad \frac{1}{M} \frac{dM}{d\rho} = \sigma V \frac{dV}{d\rho}, \quad (1)$$

$$\frac{dz}{dt} = -V \sin \theta, \quad \rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{z}{h}\right), \quad \sigma = \frac{C_H}{QC_D}.$$

Здесь V, M, A — скорость, масса и площадь миделевого сечения метеороида; z — высота полета; ρ — плотность изотермической атмосферы на высоте z ; t — время; θ — угол наклона траектории метеороида к горизонту плоской поверхности Земли; $\rho_0 = 1.225 \text{ кг/м}^3$ — плотность атмосферы на уровне моря; h — шкала высот, равная 7 км; C_D — коэффициент сопротивления; C_H — коэффициент теплопередачи на единицу площади миделя; Q — эффективная теплота уноса массы материала метеороида; σ — параметр абляции (уноса массы). Будем использовать феноменологическое выражение, связывающее площадь миделя метеороида с его массой: $A/A_e = (M/M_e)^\mu$ [1]; индекс e указывает на начальные значения величин при входе метеороида в атмосферу, μ — коэффициент формы тела. При $\mu = 2/3$ форма метеороида во время движения не меняется, т.е. абляция происходит равномерно по поверхности.

При постоянном параметре абляции σ уравнения (1) имеют решение, выражающее массу метеороида через его скорость:

$$\frac{M}{M_e} = \exp\left[\frac{-u_e}{1-\mu}(1-\nu^2)\right], \quad \nu = \frac{V}{V_e}, \quad u_e = \frac{(1-\mu)\sigma V_e^2}{2}, \quad (2)$$

где u_e — безразмерный параметр абляции. После интегрирования первого из уравнений (1) с учетом (2) получим выражение, определяющее в неявном виде скорость метеороида:

$$Ei(u_e) - Ei(u_e \nu^2) = e^{u_e} \bar{\rho}, \quad Ei(x) = v.p. \int_{-\infty}^x \frac{e^t dt}{t} = \gamma + \ln x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!k}, \quad (3)$$

$$\bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_m}, \quad \rho_m = \frac{\beta_e \sin \theta}{h}, \quad \beta_e = \frac{M_e}{A_e C_D},$$

где γ — постоянная Эйлера ($\gamma \approx 0.5772$). Это выражение зависит от безразмерного параметра абляции u_e и безразмерной плотности атмосферы $\bar{\rho}$, которая в свою очередь зависит от баллистического коэффициента β_e . Соотношение (3), связывающее скорость метеороида, его начальные параметры и плотность атмосферы, содержит интегральную показательную функцию Ei , вычисляемую с помощью бесконечного сходящегося степенного ряда, поэтому эта форма решения не очень удобна. Воспользуемся аппроксимацией, полученной в работе [17] для функции $Ei(u_e) - Ei(u_e \nu^2)$ в диапазоне $0 \leq u_e \leq 2$, $0 \leq \nu \leq 1$, и представим решение (3) для относительной скорости метеороида в более простом, но снова неявном виде:

$$\bar{\rho} = -2 \exp(-0.83(1-\nu)u_e) \ln \nu. \quad (4)$$

Для того чтобы выразить скорость метеороида ν через плотность атмосферы (параметр $\bar{\rho}$) в явном виде, в настоящей работе мы получили приближенное решение уравнения (4) в предположении слабого влияния уноса массы метеороида на его скорость, имеющее простой вид:

$$\nu = \exp(-0.5\bar{\rho} \exp(0.42\bar{\rho}u_e)). \tag{5}$$

Масса метеороида определяется из соотношения (2). Отыскав массу и скорость метеороида, можно найти его светимость (световую кривую), которая пропорциональна производной по времени от его кинетической энергии [3].

Решение для относительной скорости (5) сравнивалось с точным решением уравнений ФТМ (3), а также с решением аппроксимационного уравнения (4) при значениях параметра u_e , менявшихся от 0.2 до 3. Пример сравнения приведен на рис. 1. При малых u_e характер кривых не меняется и аналогичен представленному на рис. 1. С увеличением u_e начиная с единицы аппроксимация (4) теряет точность и дальше отходит от точного решения, в то время как решение (5) приближается к точному. Видно, что при любых значениях u_e в рассмотренном диапазоне решение (5) имеет удовлетворительную точность при $\nu \geq 0.3$, т.е. до тех пор, пока скорость метеороида не уменьшится примерно в три раза. Можно также сказать, что решение (5) обладает приемлемой точностью при значениях параметра $\bar{\rho}$, меньших 2. Если принять сферическую форму метеороида с начальным радиусом R_e , то это будет соответствовать плотности атмосферы $\rho \leq \rho_0 R_e \sin \theta$ ($[R_e] = \text{м}$) при плотности метеороида 3.3 г/см^3 , характерной (средней) для обыкновенных хондритов, составляющих более 80% найденных метеоритов.

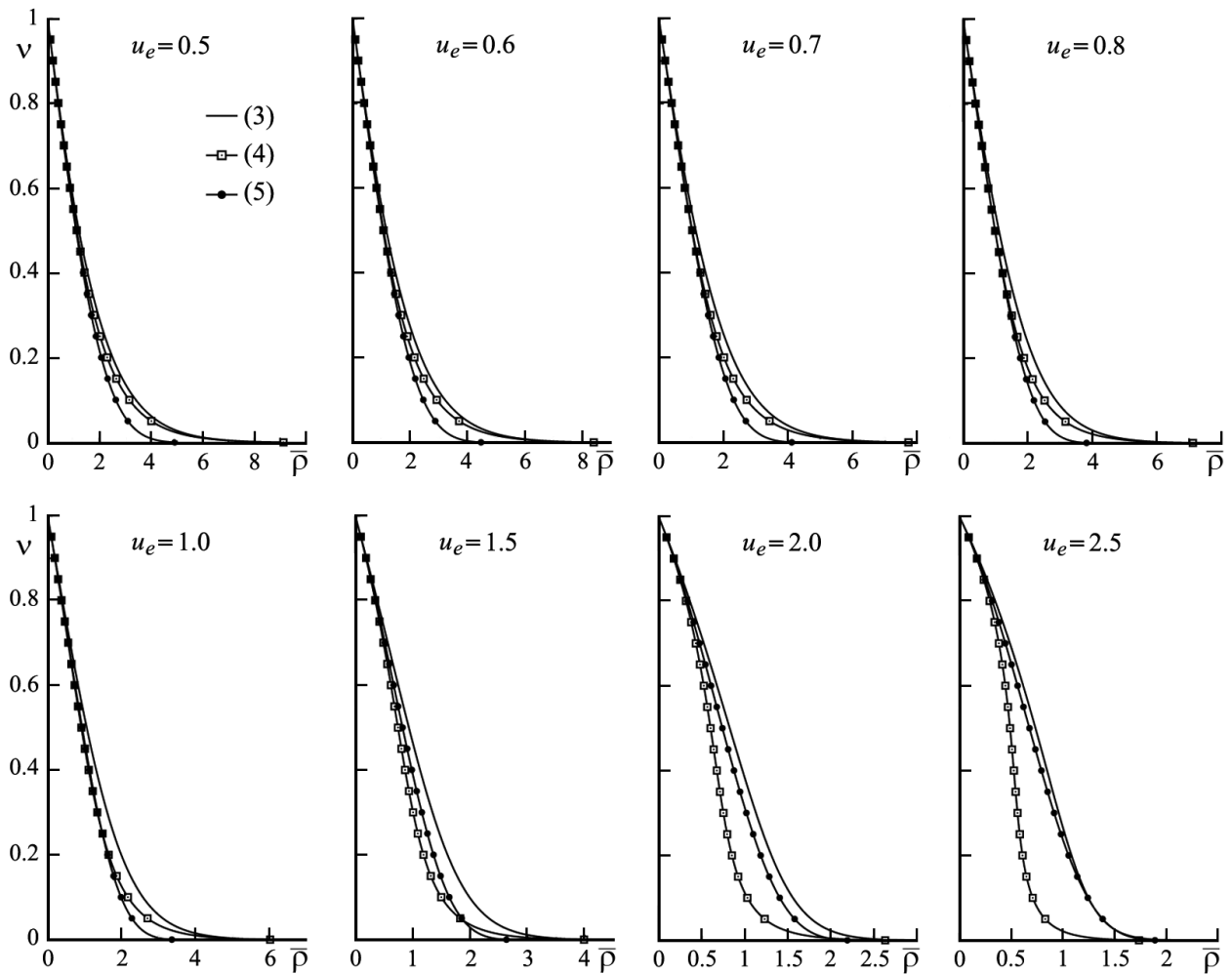


Рис. 1. Сравнение решений (4), (5) для скорости метеороида с точным решением (3)

Численно-аналитический метод решения уравнений ФТМ при переменном параметре абляции. В действительности радиационный тепловой поток к поверхности метеороида зависит от его скорости, размера и плотности атмосферы [18], поэтому коэффициент теплопередачи

C_H меняется вдоль траектории и соответственно меняется параметр абляции σ . Представляет интерес разработать простой метод расчета скорости и массы метеороида при переменном параметре абляции σ и выяснить, насколько учет непостоянности σ влияет на характеристики метеороида.

Проведенные расчеты показали, что первые 5 членов ряда $Ei(x)$ в выражении (3) обеспечивают точность вычисления скорости и массы метеороида менее 0.1% для $0 \leq \nu \leq 1$ и $0.2 \leq u_e \leq 3$. Поэтому отыскание скорости в произвольной точке траектории в результате итерационного решения уравнения

$$\ln(\bar{\nu}^2) + \sum_{k=1}^5 \frac{u_e^k (\bar{\nu}^{2k} - 1)}{k!k} + \frac{\exp(u_e \bar{\nu}^2)}{u_e \bar{\nu}^2} u_e (\nu^2 - \bar{\nu}^2) = \exp(u_e) \bar{\rho}, \quad (6)$$

где $\bar{\nu}$ — значение относительной скорости, полученное на предыдущей итерации, не представляет особого труда: итерационный процесс сходится достаточно быстро. Вычисление параметра σ может быть включено в итерационный процесс (6). Это не совсем корректно, поскольку аналитическое решение (3) получено в предположении постоянства σ . Однако проведенные расчеты показали, что такой подход обеспечивает удовлетворительную точность.

Безытерационный метод решения уравнений ФТМ с учетом переменного параметра уноса массы σ предполагает спуск по траектории с некоторым шагом по высоте или по плотности атмосферы с использованием либо простого выражения (5), либо выражения (6). В этом случае на каждом шаге берется значение параметра σ , вычисленное на предыдущем шаге. Этот метод назовем численно-аналитическим.

Для проведения расчетов использовалось аппроксимационное выражение для коэффициента радиационной теплопередачи C_H [9], которое получено в диапазоне параметров, ориентированном на исследование входа в атмосферу Челябинского метеороида, и которое для сферы с радиусом $R > 4.5$ м имеет вид

$$C_H = \phi \rho^n 450^m, \quad \phi = 1.96 \psi \cdot 10^{(48.89 - 1.558V + 0.0266V^2) \lg V - 38} \frac{V - 8.43}{0.9V - 1.31}, \quad (7)$$

$$n = 0.32 - 0.0122V, \quad m = 1.688 - 0.18V + 0.00538V^2, \quad \psi = 0.8,$$

где $[\rho] = \text{г/см}^3$, $[V] = \text{км/с}$. Представленные ниже расчеты выполнены при значениях параметров, характерных для входа в атмосферу Челябинского метеороида [12]: $V_e = 19$ км/с, $R_e = 10$ м, $\theta = 18^\circ$, плотность метеороида $\delta = 3.3$ г/см³. Полагалось, что $Q = 8$ км²/с² (теплота испарения обыкновенных хондритов [19]), $\mu = 2/3$, $C_D = 1$, форма тела сферическая. Численное решение найдено тремя способами: а) система (1) решалась явным методом Эйлера (первого порядка); б) система (3), (2) решалась аналитическим (итерационным) методом (6); в) система (3), (2) решалась численно-аналитическим (безытерационным) методом. В случаях а и в было проведено несколько расчетов с разными шагами по вертикальной координате z . Представленные на рис. 2 результаты получены с шагом 0.5 км. Этот шаг обеспечивает точность вычислений массы и скорости метеороида менее 2%. Расхождение результатов, полученных тремя способами, не превышает 2%.

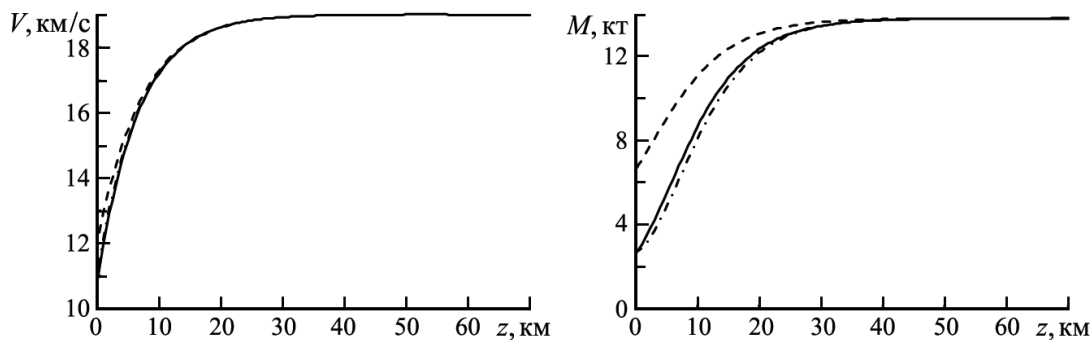


Рис. 2. Сравнение решений, полученных при $\sigma = 0.007$ (пунктирные линии); $0.0143 \text{ с}^2/\text{км}^2$ (штрихпунктирные) и при переменном значении σ (сплошные)

На рис. 2 показаны значения скорости и массы метеороида при постоянных значениях параметра абляции $\sigma = 0.007$ и $0.0143 \text{ с}^2/\text{км}^2$ и переменном значении σ , рассчитываемом вдоль траектории по формуле (7). Видно, что заметное изменение массы метеороида начинает происходить значительно

раньше, чем изменение его скорости, и что относительная масса метеороида убывает гораздо быстрее, чем его относительная скорость. Как следует из рис. 2, значения скорости и массы, полученные с использованием корреляции (7), близки к значениям, полученным при расчетах с $\sigma = 0.0143 \text{ с}^2/\text{км}^2$. Это значение параметра абляции практически совпадает со средним наблюдательным значением $\sigma = 0.014 \text{ с}^2/\text{км}^2$ для обыкновенных хондритов [3, 10].

Работа выполнена в соответствии с планом исследований НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова при частичной поддержке РФФИ, проект № 18–01–00740.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бронштэн В.А.* Физика метеорных явлений. М.: Наука, 1981.
2. *Немчинов И.В., Попова О.П.* Анализ Сихотэ-Алинского события 1947 г. и его сравнение с явлением 1 февраля 1994 г. // *Астрон. вестн.* 1997. **31**, № 5. 458–471.
3. *Ceplecha Z., Borovička J., Elford W.G., ReVelle D.O., Hawkes R.L., Porubčan V., Šimek M.* Meteor phenomena and bodies // *Space Sci. Rev.* 1998. **84**. 327–471.
4. *Турский Г.А., Ханукаева Д.Ю.* Баллистика дробящегося метеороида с учетом уноса массы в неизотермической атмосфере. II // *Космич. исслед.* 2008. **46**, № 2. 122–134.
5. *Avramenko M.I., Glazyrin I.V., Ionov G.V., Karpeev A.V.* Simulation of the airwave caused by the Chelyabinsk superbolide // *J. Geophys. Res. Atmospheres.* 2014. **119**. 7035–7050.
6. *Григорян С.С., Ибодов Ф.С., Ибодов С.И.* Челябинский суперболид: к физике взрыва // *Астрон. вестн.* 2013. **47**, № 4. 292–298.
7. *Collins G.S., Lynch E., McAdam R., Davison T.M.* A numerical assessment of simple airblast models of impact airbursts // *Meteoritics and Planetary Sci.* 2017. **52**. 1542–1560.
8. *Register P.J., Mathias D.L., Wheeler L.F.* Asteroid fragmentation approaches for modeling atmospheric energy deposition // *Icarus.* 2017. **284**. 157–166.
9. *Брыкина И.Г.* О модели фрагментации крупного метеороида: моделирование взаимодействия Челябинского метеороида с атмосферой // *Астрон. вестн.* 2018. **52**, № 5. 437–446.
10. *Ceplecha Z., ReVelle D.O.* Fragmentation model of meteoroid motion, mass loss, and radiation in the atmosphere // *Meteoritics and Planetary Sci.* 2005. **40**, N 1. 35–54.
11. *Borovička J., Tóth J., Igaz A., Spurný P., Kalenda P., Haloda J., Svoreň J., Kornos L., Silber E., Brown P., Husarik M.* The Košice meteorite fall: Atmospheric trajectory, fragmentation, and orbit // *Meteoritics and Planetary Sci.* 2013. **48**, N 10. 1757–1779.
12. *Borovička J., Spurný P., Brown P., Wiegert P., Kalenda P., Clark D., Shrbený L.* The trajectory, structure and origin of the Chelyabinsk asteroidal impactor // *Nature.* 2013. **503**. 235–237.
13. *Попова О.П., Дженнискенс П., Глазачев Д.О.* Фрагментация Челябинского метеороида // *Динамические процессы в геосферах: Сб. науч. тр. ИДГ РАН. Вып. 5.* М.: ГЕОС, 2014. 59–78.
14. *Borovička J., Popova O., Spurný P.* The Maribo CM2 meteorite fall — Survival of weak material at high entry speed // *Meteoritics and Planetary Sci.* 2019. **54**, N 5. 1024–1041.
15. *Brykina I., Bragin M.* Testing of the new meteoroid fragmentation model applied to the Chelyabinsk event // *Proc. Int. Meteor Conf. Pezinok-Modra, Slovakia. August 30–September 2.* 2018. Hove, Belgium: IMO, 2019. 92–96.
16. *Брыкина И.Г., Брагин М.Д., Егорова Л.А.* О моделях фрагментации метеороидов в атмосфере // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике.* 2019. **20**, вып. 2. 1–10.
17. *Стулов В.П., Мирский В.Н., Вислый А.И.* Аэродинамика болидов. М.: Наука, 1995.
18. *Брыкина И.Г., Турский Г.А.* Унос массы и световая кривая крупного метеороида. Аналитическое решение // *Прикл. матем. и механ.* 2017. **81**, № 5. 571–592.
19. *Baldwin B., Sheaffer Y.* Ablation and breakup of large meteoroids during atmospheric entry // *J. Geophys. Res.* 1971. **76**, N 19. 4653–4668.

Поступила в редакцию
31.05.2019

Краткие сообщения

УДК 510.52

КРИТЕРИЙ НЕЙРОПОРОЖДЕННОСТИ
АВТОМАТНЫХ ФУНКЦИЙ С ЗАДЕРЖКОЙГ. В. Боков,¹ А. С. Дробышев²

В работе рассматриваются нейропорожденные автоматы, представляющие собой автоматные функции, порожденные пороговыми булевыми функциями с задержкой. Доказывается критерий нейропорожденности автоматных функций с задержкой.

Ключевые слова: автоматные функции, пороговые функции, нейропорожденные автоматы.

Neural automata being finite automata represented by a composition of threshold functions with time delay are considered in the paper. A simple criterion to test whether a given automaton with time delay can be represented by a neural automation is proved.

Key words: finite automata, threshold function, neural automata.

Проблеме нейронных сетей сегодня уделяется большое внимание. В настоящей работе мы сосредоточимся на функциональных возможностях нейронных сетей. Первое описание поведения нейронных сетей было получено в 1943 г. У.С. Мак-Каллоком и В. Питтсом [1], позднее, в 1956 г., С.К. Клини [2] показал, что каждый конечный автомат моделируется нейронной сетью с задержкой в два такта. В 2008 г. С.В. Моисеев [3] не только показал, что не любой конечный автомат можно смоделировать нейронной сетью, но и доказал необходимые и достаточные условия, при которых это моделирование возможно.

Для конечного множества символов A введем обозначения: A^* — множество всех слов, Λ — пустое слово, $A^+ = A^* \setminus \{\Lambda\}$, $A^\omega = \mathbb{N} \rightarrow A$ — множество всех бесконечных последовательностей символов в алфавите A . Отображение $f: A^\omega \rightarrow B^\omega$ называется *автоматной функцией* или просто *автоматом*, если существуют конечное множество Q , $q_0 \in Q$, и отображения $\varphi: Q \times A \rightarrow Q$ и $\psi: Q \times A \rightarrow B$, такие, что

$$f(x)(t) = \psi(g(x)(t), x(t)) \quad \text{и} \quad g(x)(1) = q_0, \quad g(x)(t+1) = \varphi(g(x)(t), x(t+1))$$

для всех $x \in A^\omega$ и $t \in \mathbb{N}$. При этом набор $\mathcal{A} = \langle A, Q, B, \varphi, \psi, q_0 \rangle$ называется *автоматным заданием* отображения f , Q — *множество состояний*, φ — *функция переходов*, ψ — *функция выходов*. Положим

$$\varphi^*(\Lambda) = q_0, \quad \varphi^*(\alpha a) = \varphi(\varphi^*(\alpha), a) \quad \text{и} \quad \psi^*(\Lambda) = \Lambda, \quad \psi^*(\alpha a) = \psi(\varphi^*(\alpha), a).$$

Состояние $q \in Q$ *достижимо*, если $q = \varphi^*(\alpha)$ для некоторого $\alpha \in A^*$. Множество $\mathcal{L}(f) = \{\alpha \in A^+ \mid \psi^*(\alpha) = 1\}$ назовем *языком, распознаваемым автоматом* $f: A^\omega \rightarrow \{0, 1\}^\omega$. *Задержка* — это автоматная функция $\mathfrak{Z}_c: \{0, 1\}^\omega \rightarrow \{0, 1\}^\omega$, $c \in \{0, 1\}$, такая, что

$$\mathfrak{Z}_c(x)(1) = c \quad \text{и} \quad \mathfrak{Z}_c(x)(t) = x(t-1) \quad \text{при} \quad t \geq 2.$$

Далее будем рассматривать только автоматные функции вида $f: A^\omega \rightarrow \{0, 1\}^\omega$, где $A = \{0, 1\}^n$, $n \geq 0$. Обозначим через $[\cdot]$ замыкание таких функций относительно суперпозиции и обратной связи [4].

Отображение $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ называется *пороговой функцией*, если найдутся такие $c_i \in \mathbb{Z}$, что

$$f(x_1, \dots, x_n) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad c_1 \cdot x_1 + \dots + c_n \cdot x_n \geq c_0.$$

¹ Боков Григорий Владимирович — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: bokov@intsys.msu.ru.

² Дробышев Александр Сергеевич — студ. каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: drobyshev.sanya@yandex.ru.

Bokov Grigoriy Vladimirovich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associated Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intelligent Systems.

Drobyshev Alexandr Sergeevich — Student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intelligent Systems.

Нейроны — это автоматные функции вида $\mathfrak{Z}_c f$, где f — пороговая функция и $c \in \{0, 1\}$. Множество всех нейронов обозначим через \mathbf{N} . Автоматные функции из класса $[\mathbf{N}]$ назовем *нейропорожденными*.

Отношение $R \subseteq Q \times A$ назовем *перестановочным*, если для любых $(q_1, a_1), (q_2, a_2) \in R$ либо $(q_1, a_2) \in R$, либо $(q_2, a_1) \in R$. Для автоматного задания $(A, Q, \{0, 1\}, \varphi, \psi, q_0)$ положим

$$A_q = \{a \in A \mid \psi(q, a) = 1\} \quad \text{и} \quad R_a = \{\alpha \in A^* \mid \psi^*(\alpha a) = 1\}.$$

Теорема. Для любой автоматной функции $f: A^\omega \rightarrow \{0, 1\}^\omega$ и любого ее автоматного задания $(A, Q, \{0, 1\}, \varphi, \psi, q_0)$, все состояния которого достижимы, следующие условия равносильны:

- 1) автомат $\mathfrak{Z}_c f$ нейропорожден;
- 2) отношение $\{(q, a) \in Q \times A \mid \psi(q, a) = 1\}$ перестановочно;
- 3) множество $\{A_q \mid q \in Q\}$ линейно упорядочено по включению;
- 4) множество $\{R_a \mid a \in A\}$ линейно упорядочено по включению;
- 5) существуют такие регулярные множества $R_{a_1} \subseteq \dots \subseteq R_{a_n}, a_i \in A$, что

$$\mathcal{L}(f) = \bigcup_{i=1}^n R_{a_i} \cdot \{a_i\};$$

6) существуют перестановочное отношение $P \subseteq U \times A$ и такое семейство регулярных множеств $L_u, u \in U$, что

$$\mathcal{L}(f) = \bigcup_{u \in U} L_u \cdot \{a \in A \mid (u, a) \in P\}.$$

Доказательство. Последовательно докажем каждый из переходов.

1 \rightarrow 2. Следует из утверждения 12 в [3].

2 \rightarrow 3. По определению перестановочного отношения если $a_1 \in A_{q_1}$ и $a_2 \in A_{q_2}$, то либо $a_1 \in A_{q_2}$, либо $a_2 \in A_{q_1}$. Следовательно, либо $A_{q_1} \subseteq A_{q_2}$, либо $A_{q_2} \subseteq A_{q_1}$ для любых $q_1, q_2 \in Q$.

3 \rightarrow 4. Рассмотрим $a_1, a_2 \in A$ и $\alpha_1 \in R_{a_1}, \alpha_2 \in R_{a_2}$. Заметим, что $a_i \in A_{\varphi^*(\alpha_i)}$ для любого i . Поэтому либо $A_{\varphi^*(\alpha_1)} \subseteq A_{\varphi^*(\alpha_2)}$, либо $A_{\varphi^*(\alpha_2)} \subseteq A_{\varphi^*(\alpha_1)}$. Откуда заключаем, что либо $\alpha_1 \in R_{a_2}$, либо $\alpha_2 \in R_{a_1}$. Следовательно, либо $R_{a_1} \subseteq R_{a_2}$, либо $R_{a_2} \subseteq R_{a_1}$ для любых $a_1, a_2 \in A$.

4 \rightarrow 5. Пусть $R_{a_1} \subseteq \dots \subseteq R_{a_n}$ — линейный порядок элементов множества $\{R_a \mid a \in A\}$. Поскольку

$$\mathcal{L}(f) = \{\alpha \in A^+ \mid \psi^*(\alpha) = 1\} \quad \text{и} \quad R_a \cdot \{a\} = \{\alpha a \in A^+ \mid \psi^*(\alpha a) = 1\},$$

верно равенство $\mathcal{L}(f) = \bigcup_{i=1}^n R_{a_i} \cdot \{a_i\}$.

5 \rightarrow 6. Положим $U = Q, P = \{(u, a) \in U \times A \mid \psi(u, a) = 1\}$ и $L_u = \{\alpha \in R_a \mid \varphi^*(\alpha) = u\}$ для всех $u \in U$. Тогда $\mathcal{L}(f)$ по определению имеет требуемый вид.

6 \rightarrow 1. Следует из теоремы 1 в [1]. Теорема доказана.

В заключение стоит отметить, что в теореме, доказанной в настоящей работе, в отличие от результатов работы [3], устанавливаются простые и легкопроверяемые условия нейропорожденности автоматной функции с задержкой.

Исследование первого автора выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-01-00670, второго автора — при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (грант № 075-15-2020-801).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. McCulloch W.S., Pitts W. A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity // Bull. Math. Biophys. 1943. **5**. 115–133.
2. Kleene S.C. Representation of events in nerve nets and finite automata // Automata Studies. Princeton Univ. Press, 1956. 3–42.
3. Моисеев С.В. О реализации автоматов нейронными сетями // Интеллект. системы. 2008. **12**, № 1–4. 283–316.
4. Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов. М.: Изд-во МГУ, 2019.

Поступила в редакцию
11.09.2019

УДК 517.938.5

СВОЙСТВО НЕКОМПАКТНОСТИ СЛОЕВ И ОСОБЕННОСТЕЙ НЕЕВКЛИДОВОЙ СИСТЕМЫ КОВАЛЕВСКОЙ НА ПУЧКЕ АЛГЕБР ЛИ

В. А. Кибкало ¹

Показано, что слоения Лиувилля семейства неевклидовых аналогов интегрируемой системы Ковалевской на пучке алгебр Ли имеют как компактные, так и некомпактные слои. Также существует перестройка их компактного совместного уровня в некомпактный, имеющая некомпактный особый слой. В частности, это верно для $e(2, 1)$ -аналога системы Ковалевской. В случае ненулевой постоянной площадей доказан критерий наличия некомпактной компоненты поверхности уровня первых интегралов и функций Казимира.

Ключевые слова: гамильтонова система, интегрируемость, твердое тело, алгебра Ли, слоение Лиувилля, компактность.

It is shown that Liouville foliations of the family on non-Euclidean analogs of Kovalevskaya integrable system on a pencil of Lie algebras have both compact and noncompact fibers. A bifurcation of their compact common level surface into a noncompact one exists and has a noncompact singular fiber. In particular, this is true for the non-Euclidean $e(2, 1)$ -analogue of the Kovalevskaya case of rigid body dynamics. For the case of nonzero area integral, we prove an effective criterion of existence of a noncompact component of the common level surface of first integrals and Casimir functions.

Key words: Hamiltonian system, integrability, rigid body, Lie algebra, Liouville foliation, compactness.

Обсуждаются аналоги известной интегрируемой системы Ковалевской и ее обобщения И. В. Комаровым (см. [1]) на пучок $so(3, 1)$ - $e(3)$ - $so(4)$ алгебр Ли с параметром $\varkappa \in \mathbb{R}$. Их скобки Ли-Пуассона на $\mathbb{R}^6(\hat{J}_1, \hat{J}_2, \hat{J}_3, \hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ имеют вид (ε_{ijk} есть знак перестановки $(ijk) \rightarrow (123)$)

$$\{\hat{J}_i, \hat{J}_j\} = \varepsilon_{ijk} \hat{J}_k, \quad \{\hat{J}_i, \hat{x}_j\} = \varepsilon_{ijk} \hat{x}_k, \quad \{\hat{x}_i, \hat{x}_j\} = \varepsilon_{ijk} \varkappa \hat{J}_k. \quad (1)$$

Для этих систем были найдены [2–4] бифуркационные диаграммы и перестройки-атомы торов Лиувилля, а в [5–8] вычислены тонкие топологические инварианты Фоменко–Цишанга [9, 10].

В работе А. В. Борисова и И. С. Мамаева [11] описан аналог задачи Ковалевской (и других случаев интегрируемости: Эйлера, Лагранжа, Горячева–Чаплыгина, Гесса) динамики твердого тела в пространстве постоянной отрицательной кривизны (плоскости Лобачевского). Комплексное преобразование $\hat{J}_j = i \cdot J_j / k$, $\hat{x}_j = i \cdot x_j / k$, $j = 1, 2, 3$, переводит семейство систем Ковалевской (1) на пучке $so(3, 1)$ - $e(3)$ - $so(4)$ в новое семейство. Алгебре Ли $e(3)$ (т.е. случаю $\varkappa = 0$) соответствует алгебра Ли $e(2, 1)$. Остальные алгебры Ли заданы структурными константами их скобок Пуассона. Разделение переменных, аналогичное полученному Кеттером, для новой задачи при $\varkappa = 0$ было построено С. В. Соколовым в [12].

Функции Казимира (геометрический интеграл f_1 и интеграл площадей f_2), гамильтониан H и первый интеграл F нового семейства систем Ковалевской в координатах J_1, \dots, x_3 имеют вид

$$f_1 = x_1^2 + x_2^2 - k^2 x_3^2 + \varkappa x_1^2 + \varkappa x_2^2 - \varkappa k^2 x_3^2 = a, \quad (2)$$

$$f_2 = x_1 J_1 + x_2 J_2 - k^2 x_3 J_3 = b, \quad (3)$$

$$H = \frac{1}{2} (J_1^2 + J_2^2 - 2k^2 J_3^2) - b_1 x_1 = h, \quad (4)$$

$$F = \frac{1}{4} (J_1^2 - J_2^2 + 2b_1 x_1 + \varkappa b_1^2)^2 + \frac{1}{4} (2J_1 J_2 + 2b_1 x_2)^2 = f. \quad (5)$$

¹ Кибкало Владислав Александрович — асп. каф. дифференциальной геометрии и приложений мех.-мат. ф-та МГУ; мл. науч. сотр. Московского центра фундаментальной и прикладной математики, e-mail: slava.kibkalo@gmail.com.

Kibkalo Vladislav Alexandrovich — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Differential Geometry and Applications; Junior Researcher, Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics.

Топология фазового пространства, расслоенного на совместные уровни интегралов (2)–(5), и поведение траекторий таких систем могут быть устроены весьма необычно. Так, для неевклидова случая Эйлера (свободного движения тела по некоторому пространству отрицательной кривизны) свойство траектории быть ограниченной (на 2-торе) или неограниченной определяется знаком $J_1^2 + J_2^2 - 2k^2 J_3 = \langle \vec{J}, \vec{J} \rangle_g$ относительно квадрата вектора J 2-формы $\text{diag}(1, 1, -k^2)$.

Интересно проверить, содержат ли системы Ковалевской на новом пучке некомпактные слои и их бифуркации. Системы с такими слоениями активно изучаются, в работе [13] приведен широкий список таких особенностей, обнаруженных в интегрируемых системах механики и геометрии. В [14] были классифицированы слоения Лиувилля бильярдных систем с неограниченными столами. Их особенности топологически эквивалентны некомпактным боттовским атомам-бифуркациям интегрируемых гамильтоновых систем. В работе [15] предложена классификация некомпактных особенностей в достаточно широкой общности.

Другой класс таких особенностей включает перестройку компактного слоя в некомпактный без падения ранга отображения момента [13]. В настоящей работе показано, что некомпактные слои системы Ковалевской возникают похожим образом (теорема 3). Отметим, что изучать такие особенности вычислительным путем весьма непросто.

Также в настоящей работе доказана связь между некомпактностью совместного уровня первых интегралов (слоя или несвязного объединения слоев) и падением степени некоторого полинома с переменными коэффициентами (которые непрерывны и ограничены). Каждая точка слоя соответствует корню этого полинома, а неограниченность корня при малом изменении коэффициентов (по теореме Виета) возможна лишь при обращении в нуль старшего коэффициента многочлена. Вопросы полноты потоков и функциональной независимости первых интегралов мы не рассматриваем.

1. Параметризация совместного уровня $T_{a,b,h,f} = \{y \in \mathbb{R}^6 \mid f_1 = a, f_2 = b, H = h, F = f\}$. Компактность множества $T_{a,b,h,f}$ равносильна его ограниченности: оно замкнуто как заданное системой полиномиальных уравнений. Используя вид функций H и f_1 , выразим функции J_3^2 и x_3^2 через переменные J_1, J_2, x_1, x_2 .

Замена координат $\xi_1 = J_1^2 - J_2^2 + 2b_1 x_1 + \varkappa b_1^2$ и $\xi_2 = 2J_1 J_2 + 2b_1 x_2$ биективна и линейна по парам переменных x_1, x_2 и ξ_1, ξ_2 . Здесь $\xi_1^2 + \xi_2^2 = 4F := \tilde{f}^2$, т.е. используется специальный вид интеграла F . Теперь перейдем к полярным координатам f, α, r, β с особенностями при $r = 0$ или $\tilde{f} = 0$:

$$\xi_1 = \tilde{f} \cos \alpha, \quad \xi_2 = \tilde{f} \sin \alpha, \quad J_1 = r \cos \beta, \quad J_2 = r \sin \beta.$$

Рассмотрим $A = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ и множество $V = A(\alpha, \beta) \times \mathbb{R}^+(r) / \sim$ с эквивалентностью

$$(0, \beta, r) \sim (2\pi, \beta, r), \quad (\alpha, 0, r) \sim (\alpha, 2\pi, r), \quad (\alpha, \beta_1, 0) \sim (\alpha, \beta_2, 0) \quad \text{для } \forall \alpha, \beta, \beta_i \in [0, 2\pi].$$

Множество точек $x \in V : r(x) > 0$ есть произведение 2-тора на открытый луч. Примем $f \neq 0$.

Перепишем f_1, f_2, H в новых координатах. Из выражения для (4) получаем $J_1^2 - k^2 J_3^2 = h + (\xi_1 - \varkappa b_1^2)/2$ и подставляем правую часть соотношения в формулу (2). Функции J_3^2 и x_3^2 от (α, β, r) принимают вид

$$k^2 J_3^2(\alpha, \beta, r) = -h + (b_1^2 \varkappa)/2 - 1/2 \tilde{f} \cos \alpha + r^2 (\cos \beta)^2, \tag{6}$$

$$4b_1^2 k^2 x_3^2(\alpha, \beta, r) = r^4 + 2(\varkappa b_1^2 - \tilde{f} \cos(\alpha - 2\beta))r^2 + (-4ab_1^2 + \tilde{f}^2 + 4\varkappa b_1^2 h - \varkappa^2 b_1^4). \tag{7}$$

Возведя в квадрат уравнение $-b + x_1 J_1 + x_2 J_2 = k^2 x_3 J_3$ интеграла площадей, получим полином $P(r)$ степени 4 по r :

$$8b_1 P(r) = g_4(\alpha, \beta)r^4 + g_3(\alpha, \beta)r^3 + g_2(\alpha, \beta)r^2 + g_1(\alpha, \beta)r + g_0(\alpha, \beta) = 0. \tag{8}$$

Коэффициенты $g_j(\alpha, \beta)$ ограничены на A и непрерывно зависят от α, β , значений интегралов a, b, h, f на слое, параметра пучка \varkappa и констант b_1, k :

$$g_4 = 2h - \varkappa b_1^2 + \tilde{f} \cos(\alpha - 4\beta), \quad g_3 = 8b_1 b \cos \beta,$$

$$g_2 = 4ab_1^2 - 4\tilde{f} h \cos(\alpha - 2\beta) + 2(2ab_1^2 - \tilde{f}^2 - 2\varkappa b_1^2 h + \varkappa^2 b_1^4) \cos 2\beta,$$

$$g_1 = b \cdot 8b_1(-\tilde{f} \cos(\alpha - \beta) + \varkappa b_1^2 \cos \beta), \quad g_0 = 8b^2 b_1^2 + (2h - \varkappa b_1^2 + \tilde{f} \cos \alpha)(-4ab_1^2 + \tilde{f}^2 + 4\varkappa b_1^2 h - \varkappa^2 b_1^4).$$

Пусть $S \subset V$ есть поверхность корней $P(r)$. При $f \neq 0$ определена проекция $\pi : T_{a,b,h,f} \rightarrow S$.

Лемма 1. *Прообраз $\pi^{-1}(x)$ точки $x \in S$ пуст тогда и только тогда, когда $J_3^2(x) < 0$ или $x_3^2(x) < 0$ (формулы (6), (7)). Прообраз точки x состоит из одной точки, если $x_3(x) = J_3(x) = 0$. Прообраз каждой из остальных точек состоит из двух точек, причем если $x_3(x) \cdot J_3(x) \neq 0$, то он является одной из следующих пар точек:*

$$\left(+\sqrt{x_3^2(x)}, +\sqrt{J_3^2(x)} \right), \left(-\sqrt{x_3^2(x)}, -\sqrt{J_3^2(x)} \right) \text{ либо } \left(-\sqrt{x_3^2(x)}, +\sqrt{J_3^2(x)} \right), \left(+\sqrt{x_3^2(x)}, -\sqrt{J_3^2(x)} \right).$$

Доказательство. Пусть $rf \neq 0$. Тогда точки $\mathbb{R}^6(\vec{x}, \vec{J})$ из прообраза точки $x \in S$ заведомо лежат в множестве $F = f$. Возведение в квадрат уравнения $k^2 x_3 J_3 = -b + x_1 J_1 + x_2 J_2$ добавляет новые решения, в точках которых знак $x_3 J_3$ и знак правой части отличаются (так, при $x_3 J_3 = 0$ переход равносильен). Равенства (6), (7) позволяют явно выразить $J_3^2(x)$, $x_3^2(x)$ соответственно, т.е. выбор знаков дает ровно 4 варианта при $x_3 J_3 \neq 0$. Поскольку переход неравносильен, то потребуется выбрать одну из пар точек с одинаковым знаком $x_3 J_3$. \square

2. Достаточное условие компактности связного слоя на уровне $T_{a,b,h,f}$

Лемма 2. *Какая-либо из шести координат x_1, \dots, J_3 не ограничена на поверхности уровня $T_{a,b,h,k}$ первых интегралов тогда и только тогда, когда на ее образе в S не ограничена функция $r^2 = J_1^2 + J_2^2$.*

Доказательство. Переменные x_1, x_2 и квадраты x_3^2, J_3^2 выражаются как полиномы от J_1, J_2 , от ξ_1, ξ_2 (ограниченных по модулю значением \tilde{f} на 2-слое) и от некоторых постоянных системы. \square

Аналогично множество $r = 0$ всегда компактно в $T_{a,b,h,f}$: подставим $J_1 = J_2 = 0$ в f_1, f_2, H, F .

Как известно, корни многочлена со старшим коэффициентом 1 непрерывно зависят от его коэффициентов. Если последние непрерывны на компакте, то все корни всех таких полиномов ограничены в совокупности. Тем самым лишь обращение в нуль где-то на A старшего коэффициента $g_4(\alpha, \beta)$ может дать неограниченную поверхность S и, возможно, неограниченный уровень $T_{a,b,h,k}$.

Теорема 1 (достаточное условие компактности связной компоненты уровня интегралов). *Пусть для $H = h, F = f$, \varkappa выполнено $(2h - \varkappa b_1^2)^2 > 4f$. Тогда для неевклидовой системы Ковалевской со значением параметра \varkappa пучка скобок Пуассона и любых значений функций Казимира $f_1 = a, f_2 = b$ совместная поверхность уровня интегралов $T_{a,b,h,f}$ компактна.*

Доказательство. Старший коэффициент $P(r)$ в (8) равен $g_4(\alpha, \beta) = 2h - \varkappa b_1^2 + \tilde{f} \cos(\alpha - 4\beta)$. В случае $f \neq 0$ он отделен от нуля на торе A в том и только в том случае, когда уравнение $\cos \gamma = (2h - \varkappa b_1^2)/\tilde{f}$ не имеет корней $\gamma = \alpha - 4\beta$. В случае $f = 0$ этот коэффициент постоянен на уровне $T_{a,b,h,f}$.

При выполнении условия теоремы поделим P на g_4 , получим многочлен с непрерывными коэффициентами, ограниченными по модулю $M > 0$ на всем торе A . Тогда все корни многочленов $P(r)|_{\alpha,\beta}$ (т.е. тройки $(\alpha, \beta, r) \in S$) ограничены по модулю, например, выражением $|r| < 4 \cdot M^4$.

При любом $f \in \mathbb{R}$ из условия $(2h - \varkappa b_1^2)^2 > 4f$ следует ограниченность конечнозначной функции $r(\alpha, \beta)$ на торе A или $r(\beta)|_{f=0}$ на $S^1(\beta)$, т.е. имеет место компактность связных компонент уровня $T_{a,b,h,f}$. \square

3. Критерий некомпактности совместного уровня $T_{a,b,h,f}$ первых интегралов. Пусть далее $f > 0$ и условие $(2h - \varkappa b_1^2)^2 > 4f = \tilde{f}^2$ не выполнено. Найдем нули функции g_4 на торе A .

Лемма 3. *В случае $f > 0$ нули старшего коэффициента g_4 многочлена P на торе A лежат на кривой $\alpha = 4\beta$ при $2h - \varkappa b_1^2 = -\tilde{f}$, на кривой $\alpha = 4\beta + \pi$ при $2h - \varkappa b_1^2 = \tilde{f}$ или на паре кривых $\alpha = 4\beta \pm \phi$ при $|2h - \varkappa b_1^2| > \tilde{f}$, где $\phi = \arccos((\varkappa b_1^2 - 2h)/\tilde{f}) \in (0, \pi)$.*

Примем $b > 0$ (случай $b < 0$ аналогичен). Тогда, за исключением конечного числа точек, для всех точек кривой из леммы 3 (назовем такую кривую *кривой нулей*) степень многочлена P равна 3, т.е. нечетна и ровно на единицу меньше максимальной. Исключенные точки имеют координату $\beta = \pi/2, 3\pi/2$.

Теорема 2 (критерий наличия некомпактной связной компоненты у поверхности уровня). *Пусть $b \neq 0$ и $-\tilde{f} \leq \varkappa b_1^2 - 2h \leq \tilde{f}$, где $F = f = \tilde{f}^2/4$. Тогда совместная поверхность уровня $T_{a,b,h,f}$ со значениями $(a, b, h, \tilde{f}^2/4)$ содержит как минимум одну неограниченную компоненту.*

Доказательство. 1. При малом по модулю значении функции g_4 (в сравнении с остальными коэффициентами g_j) многочлен P имеет корень: переходя к пределу $r \rightarrow \infty$ или $r \rightarrow -\infty$ в выражении $8b_1 P r^{-3}$, получим $g_4 r - g_3 = 0$. Тем самым уравнение $P(r) = 0$ имеет ровно один "большой" по модулю вещественный корень r и его знак определяется знаками g_4 и b . А именно при $g_4 \cdot g_3 < 0$ знак корня положителен, т.е. ему соответствует точка в S с большим положительным r .

2. Рассмотрим на кривой нулей дуги, на которых $g_3 = 8b_1|b \cos \beta| > \delta$, и их ε -широкие трубчатые проколотые окрестности L_i (т.е. n дугам соответствует $2n$ односторонних тонких полосок).

Вдоль выбранной кривой нулей знак $\cos \beta$ меняется, а знак g_4 постоянен на каждой полосе, на которые тор разбивается кривыми нулей. Тогда в одной из связанных компонент L_i знак корня r всегда положителен, а модуль ограничен снизу возрастающей к бесконечности функцией от ε .

Тем самым некоторая связная компонента уровня $T_{a,b,h,f}$ содержит такой двумерный диск, что все его точки удалены от нуля пространства $\mathbb{R}^6(\vec{J}, \vec{x})$ не менее чем на любое выбранное “большое” расстояние. \square

Следствие. Если связный слой уровня $|2h - \varkappa b_1^2| = \tilde{f}$ некомпактен, то вблизи него имеются компактные слои уровней $|2h - \varkappa b_1^2| = (1 + \varepsilon)\tilde{f}$, где $\varepsilon > 0$. При $\varepsilon \rightarrow +0$ максимум расстояний от точек уровня до нуля пространства \mathbb{R}^6 растет (из-за наличия перемен знака у $\cos \beta$ при выбранном малом по модулю g_4).

Теорема 3. Совместный уровень первых интегралов $T_{a,b,h,f}$, для которого $|2h - \varkappa b_1^2| = \tilde{f} > 0$, является бифуркационным в $Q_h^3 = \{f_1 = a, f_2 = b, H = h\}$ и некомпактным. В его окрестности происходит перестройка компактного совместного уровня в некомпактный уровень.

Для определения типа гомеоморфности слоя и количества слоев будет полезно применить подход [3] к нахождению критического множества и изучить особенности рассматриваемой системы при $\cos \beta = 0$. В случае $b = 0$ близкую задачу следует решить для биквадратного уравнения $g_4 r^4 + g_2 r^2 + g_0 = 0$.

Численное построение (в системе Wolfram Mathematica 12) поверхности S над квадратом A и проекции $T_{1,1,h,4}$ на нее для $h \in \{1.8, 2, 2.5\}$ и $k = b_1 = 1, \varkappa = 0$ позволяет проиллюстрировать описанный в теореме 3 эффект.

Автор приносит благодарность научному руководителю А. Т. Фоменко за внимание к работе.

Автор является стипендиатом Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС”, проект № 18–2–6–51–1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Комаров И.В. Базис Ковалевской для атома водорода // Теор. и матем. физ. 1981. **47**, № 1. 67–72.
2. Харламов М.П. Бифуркации совместных уровней первых интегралов в случае Ковалевской // Прикл. матем. и механ. 1983. **47**, № 6. 922–930.
3. Козлов И.К. Топология слоения Лиувилля для интегрируемого случая Ковалевской на алгебре Ли $\mathfrak{so}(4)$ // Матем. сб. 2014. **205**, № 4. 79–120.
4. Kharlamov M.P., Ryabov P.E., Savushlin A.Yu. Topological atlas of the Kowalevski–Sokolov top // Regular and Chaotic Dynamics. 2016. **21**, N 1. 24–65.
5. Болсинов А.В., Рихтер П., Фоменко А.Т. Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской // Матем. сб. 2000. **191**, № 2. 3–42.
6. Kibkalo V. Topological analysis of the Liouville foliation for the Kovalevskaya integrable case on the Lie algebra $\mathfrak{so}(4)$ // Lobachevskii J. Math. 2018. **39**, N 9. 1396–1399.
7. Кибкало В.А. Топологическая классификация слоений Лиувилля для интегрируемого случая Ковалевской на алгебре Ли $\mathfrak{so}(4)$ // Матем. сб. 2019. **210**, № 5. 3–40.
8. Kibkalo V. Topological classification of Liouville foliations for the Kovalevskaya integrable case on the Lie algebra $\mathfrak{so}(3, 1)$ // Topol. and its Appl. 2020. **275**. 107028.
9. Фоменко А.Т., Цишанг Х. Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы // Изв. РАН. Сер. матем. 1990. **54**, № 3. 546–575.
10. Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Т.1, 2. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 1999.
11. Borisov A.V., Mamaev I.S. Rigid body dynamics in non-Euclidean spaces // Rus. J. Math. Phys. 2016. **23**, N 4. 431–454.
12. Соколов С.В. Интегрируемый случай Ковалевской в неевклидовом пространстве: разделение переменных // Тр. МАИ. 2018. **100**. 1–13.
13. Федосеев Д.А., Фоменко А.Т. Некомпактные особенности интегрируемых динамических систем // Фунд. и прикл. матем. 2016. **21**, № 6. 217–243.
14. Ведюшкина В.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые топологические бильярды и эквивалентные динамические системы // Изв. РАН. Сер. матем. 2017. **81**, № 4. 20–67.
15. Николаенко С.С. Топологическая классификация гамильтоновых систем на двумерных некомпактных многообразиях // Матем. сб. 2020. **211**, № 2. 123–150.

Поступила в редакцию
27.02.2020

УДК 512.57

УНАРНЫЕ АЛГЕБРЫ БЕЗ СОБСТВЕННЫХ ПОДАЛГЕБР

А. Н. Лата¹

В работе описываются эквивалентные условия отсутствия собственных подалгебр у произвольной унарной алгебры. Приведен алгоритм, который проверяет отсутствие подалгебр или находит собственные подалгебры и порождающие их элементы унарной алгебры, носитель и сигнатура которой конечны.

Ключевые слова: унарная алгебра, полигон над полугруппой, автомат без выхода.

The paper presents equivalent conditions under which a unary algebra has no subalgebras. An algorithm for finding proper subalgebras and generators in a given finite unary algebra is proposed.

Key words: unary algebra, acts over semigroups, automaton without output.

1. Введение. Унарные алгебры имеют глубокие связи с другими разделами универсальной алгебры. В частности, любая унарная алгебра $A = \langle A, \Omega \rangle$ является S -полигоном, где S — полугруппа, порожденная операциями из Ω относительно композиции отображений. И, наоборот, всякий S -полигон A является унарной алгеброй, заданной на множестве A , где унарные операции — это умножение на элементы полугруппы S .

Также возможна интерпретация унарной алгебры как автомата без выхода [1–4]. Элементы алгебры при этом рассматриваются в качестве внутренних состояний такого автомата, а операции — как входные сигналы. Поэтому унарные алгебры привлекают внимание многих исследователей, значительное место в работах которых занимают решетки конгруэнций унарных алгебр, несущие важную информацию о свойствах самих алгебр.

Приведем результаты исследований алгебр без собственных подалгебр.

В работе [5] показано, что

1) если A — алгебра над полем k с ассоциативными степенями, то либо $A \simeq k$, либо $A = kx$, $x^2 = 0$;

2) если A — конечная алгебра без подалгебр, то многообразие $\text{var} A$, порожденное A , конечно базлируемо.

В [6] доказано, что если A — алгебра без подалгебр над конечным полем \mathbb{F}_q и $d = \dim_{\mathbb{F}_q} A$ — простое число, причем в A нет нильпотентов (элементов, в некоторой степени $n > 1$ равных нулю при любой расстановке скобок), то $\text{Aut} A$ — конечная циклическая группа. Более того, в клоне производных операций на $A = \mathbb{F}_{q^d}$ лежит операция $x \cdot y = \lambda x^{q^i} y^{q^j}$, $\lambda \in \mathbb{F}_{q^d} \setminus \mathbb{F}_{q^d}^{q^i + q^j - 1}$, $i, j \in \mathbb{Z}/d$, причем \mathbb{F}_{q^d} с таким умножением $x \cdot y$ является алгеброй без подалгебр.

В [7] показано, что изучение k -алгебр без подалгебр над произвольным коммутативно-ассоциативным кольцом k с единицей сводится к случаю, когда k — поле. Кроме того, строится пример 6-мерной алгебры без подалгебр с бесконечной неабелевой группой автоморфизмов и при некоторых предположениях описываются алгебры простой размерности без подалгебр, но с неединичной группой автоморфизмов.

В [8] описаны конечные простые сюръективные алгебры без собственных подалгебр.

Заметим, что алгебрами без собственных подалгебр в классе унаров (т.е. алгебр с одной унарной операцией) являются только циклы.

В [9] описаны конечные автоматы без выхода, не имеющие собственных подавтоматов.

2. Основные определения и конструкции. Унарной алгеброй называется универсальная алгебра, все операции которой унарны или нульарны.

Унарная алгебра называется *связной*, если пересечение любых двух ее однопорожденных подалгебр непусто.

¹Лата Александр Николаевич — асп. каф. высшей алгебры мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: alex.lata@yandex.ru.

Lata Aleksandr Nikolaevich — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Higher Algebra.

Унарная алгебра называется *сильно связной*, если она порождается любым своим элементом.

Подалгебра алгебры называется *собственной*, если она отлична от самой алгебры. Через $\text{Sub}A$ обозначается решетка подалгебр алгебры A .

Полигон над полугруппой S (или S -полигон) [10] — это множество X , на котором задано действие полугруппы S , т.е. определено отображение $S \times X \mapsto X$, $(s, x) \mapsto sx$, удовлетворяющее условию $s(t)x = (st)x$ при $x \in X$ и $s, t \in S$.

Ориентированный псевдограф (или *псевдоорграф*) $G = (V, E)$ [11] определяется непустым множеством V и набором E упорядоченных пар элементов из V . Элементы множества V называются *вершинами*, а элементы набора E — *дугами* (или *ориентированными ребрами*) ориентированного псевдографа $G = (V, E)$.

В наборе E могут встречаться пары вида (v, v) , называемые *петлями*, и одинаковые пары, называемые *кратными* (или *параллельными*) *дугами*. Пары (u, v) и (v, u) считаются одинаковыми лишь в том случае, когда $u = v$.

Путем ориентированного псевдографа будем называть последовательность дуг, в которой конечная вершина всякой дуги, отличной от последней, является начальной вершиной следующей.

Ориентированный псевдограф называется *сильно связным* или *сильным* (strongly connected), если для каждой пары различных вершин v и w существует путь из v в w и из w в v .

Пусть $A = \langle A, \Omega \rangle$ — унарная алгебра. Через $\text{Graph}(A)$ обозначим граф унарной алгебры A . Граф $\text{Graph}(A)$ состоит из множества вершин A и множества помеченных дуг — всевозможных упорядоченных троек $(a, f(a), f)$, где $a \in A$ и $f \in \Omega$. Заметим, что в данном случае граф унарной алгебры является ориентированным псевдографом с реберной раскраской. Вершины графа, как обычно, изображаются точками на плоскости, а дуга $(a, f(a), f)$ — линией, направленной от a к $f(a)$ и помеченной функциональным символом f .

3. Результаты. В работе рассматриваются ориентированные псевдографы, множество вершин которых, возможно, бесконечно.

Теорема. Пусть $A = \langle A, \Omega \rangle$ — унарная алгебра, $\text{Graph}(A)$ — граф унарной алгебры, а X — полугруппа, порожденная операциями из Ω относительно композиции отображений. Следующие условия эквивалентны:

- 1) алгебра A не имеет собственных подалгебр;
- 2) псевдоорграф $\text{Graph}(A)$ сильно связный;
- 3) полугруппа X действует транзитивно на множестве A ;
- 4) алгебра A является сильно связной.

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Пусть ориентированный псевдограф $\text{Graph}(A)$ не является сильно связным. Покажем, что алгебра A имеет собственную подалгебру. Поскольку ориентированный псевдограф $\text{Graph}(A)$ не является сильно связным, то существуют такие различные $s, t \in A$, что не существует пути из s в t . Рассмотрим подалгебру $S = \langle S, \Omega \rangle$ алгебры A , порожденную множеством $\{s\}$. Очевидно, $S \neq \emptyset$. Покажем, что $A \neq S$. Предположим противное, т.е. $A = S$. Поскольку алгебра S порождена множеством $\{s\}$, то существует путь из s в t — противоречие с предположением. Таким образом, S — собственная подалгебра алгебры A .

$2 \Rightarrow 3$. Поскольку ориентированный псевдограф $\text{Graph}(A)$ является сильно связным, то для любых $a, b \in A$ существует такое слово $x \in X$, что $x(a) = b$.

$3 \Rightarrow 4$ и $4 \Rightarrow 1$ следуют из определений.

Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть $A = \langle A, \Omega \rangle$ — унарная алгебра, $\text{Graph}(A)$ — граф унарной алгебры. Вершины графа $\text{Graph}(A)$, из которых нет пути в некоторую другую вершину, являются порождающими подалгебр алгебры A .

Заметим, что при интерпретации унарной алгебры как псевдоорграфа для отсутствия собственных подалгебр достаточно некоторых операций из сигнатуры.

Например, рассмотрим унарную алгебру $A = \langle A, f, g, h \rangle$, где $A = \{1, 2, 3\}$, $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 1$, $g(1) = 2$, $g(2) = 1$, $g(3) = 3$, $h(1) = 3$, $h(2) = 2$ и $h(3) = 2$.

При интерпретации операции f на множестве A как орграфа получаем сильно связный орграф. Аналогично если вначале интерпретировать операции g и h на A как орграф, то имеем сильно связный орграф.

Следствие 2. Автомат без выхода (возможно, бесконечный) не имеет собственных подалгебр тогда и только тогда, когда его диаграмма Мура — сильно связный ориентированный псевдограф.

Следствие 3. *Атомами решетки подалгебр унарной алгебры являются ее сильно связанные подалгебры и только они.*

Следствия 2 и 3 — обобщения результата В. Н. Салия [9] на случай бесконечного автомата без выхода.

Модификации и обобщения понятия конечного автомата можно найти в [12, с. 31].

4. Алгоритм проверки отсутствия подалгебр и построения собственных подалгебр унарной алгебры. Опишем алгоритм, который проверяет отсутствие подалгебр или находит собственные подалгебры и порождающие их элементы унарной алгебры, носитель и сигнатура которой конечны.

По теореме условие отсутствия собственных подалгебр унарной алгебры $A = \langle A, \Omega \rangle$ эквивалентно тому, что псевдоорграф $\text{Graph}(A)$ унарной алгебры сильно связный. Более того, по следствию 1 вершины графа $\text{Graph}(A)$, из которых нет пути в некоторую другую вершину, являются порождающими подалгебр алгебры A .

Рассмотрим унарную алгебру $A = \langle A, \Omega \rangle$, носитель и сигнатура которой конечны. Пусть $|A| = n$. В качестве элементов алгебры возьмем целые неотрицательные числа. Представим каждую операцию $f_i \in \Omega$ данной унарной алгебры в виде списка f_i . Элементу списка соответствует результат сигнатурной операции на данном элементе. Тогда сигнатуру унарной алгебры можно интерпретировать как список Ω списков унарных операций. Кроме того, унарную алгебру в данном случае можно отождествить с представлением ее сигнатуры в виде списка списков унарных операций. Длина каждого вложенного списка равна n , поэтому мы всегда знаем носитель рассматриваемой алгебры.

Этапы работы данного алгоритма можно описать следующим образом.

Вход: унарная алгебра $A = \langle A, \Omega \rangle$ в виде списка Ω .

Выход: матрица достижимости графа $\text{Graph}(A)$ и список однопорожденных подалгебр с порождающими элементами.

1) Преобразовать унарную алгебру A в псевдоорграф $\text{Graph}(A) = (A, E)$.

2) Определить, является ли псевдограф $\text{Graph}(A)$ из п. 1 сильно связным или нет. В случае, если он сильно связный, унарная алгебра A не имеет собственных подалгебр. В противном случае вершины псевдографа $\text{Graph}(A)$, из которых нет пути в некоторую другую вершину, являются порождающими подалгебр алгебры A .

Для реализации п. 1 необходимо прочитать список Ω и в виде множества E записать все упорядоченные пары $(a, f_i(a))$.

Пункт 2 может быть сведен к поиску кратчайших путей в графе с единичными весами и найден, например, алгоритмом Уоршалла [13] или многократным применением поиска в глубину. При этом будем заполнять матрицу достижимости, в которой хранится информация о существовании путей между вершинами псевдографа $\text{Graph}(A)$.

Далее необходимо проверить матрицу достижимости на наличие путей из любой вершины псевдографа $\text{Graph}(A)$ в любую другую. Затем согласно теореме и следствию 1 сделать вывод.

Автору известно, что существуют алгоритмы проверки графа на сильную связность за линейное время (см., например, [14]). При использовании приведенного выше алгоритма в случае, если алгебра имеет собственные подалгебры, за один проход алгоритма мы получаем информацию о порождающих подалгебры заданной унарной алгебры и носителях этих подалгебр.

Поскольку любая конечная алгебра конечно порождена, то, используя найденные однопорожденные подалгебры, можно построить решетку $\text{Sub}A$ подалгебр исходной унарной алгебры A .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Imreh B. On finite nilpotent automata // Acta Cybernetica. 1981. **5**, N 3. 281–293.
2. Imreh B. On finite definite automata // Acta Cybernetica. 1985. **7**, N 1. 61–65.
3. Ćirić M., Bogdanović S., Petković T. The lattice of subautomata of an automaton: A survey // Publ. Inst. Math. Nouv. Sér. 1998. **64**, N 78. 165–182.
4. Ćirić M., Bogdanović S. Lattices of subautomata and direct sum decompositions of automata // Algebra Colloq. 1999. **6**, N 1. 71–88.
5. Львов И.В. О конечности базиса тождеств некоторых неассоциативных колец // Алгебра и логика. 1974. **14**, № 1. 15–27.
6. Artamonov V.A. On finite algebras of prime dimension without proper subalgebras // J. Algebra. 1976. **42**, N 1. 247–260.

7. Артамонов В.А. Об алгебрах без собственных подалгебр // Матем. сб. 1977. **104**, № 3. 428–459.
8. Szendrei A. Simple surjective algebras having no proper subalgebras // J. Austral. Math. Soc. 1990. **48**. 434–454.
9. Салый В.Н. Универсальная алгебра и автоматы. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1988.
10. Kilp M., Kauer U., Mikhaev A.V. Monoids, acts and categories. Berlin; N.Y.: W. de Gruyter, 2000.
11. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990.
12. Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколызин А.С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.
13. Warshall S. A theorem on boolean matrices // JACM. 1962. **9**. 11–12.
14. Tarjan R. Depth-first search and linear graph algorithms // SIAM J. Comput. 1972. **1**, N 2. 146–160.

Поступила в редакцию
28.02.2020

УДК 539.3

ЛАГРАНЖЕВО ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СЕМЕЙСТВА ОБЪЕКТИВНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ГОРДОНА–ШОУОЛТЕРА ПРИ ПРОСТОМ СДВИГЕ

Е. Д. Мартынова¹

В работе рассматривается однопараметрическое семейство объективных производных Гордона–Шоуолтера, включающее производные Олдройда, Коттер–Ривлина и Яуманна. Для движения простого сдвига найдены подвижные базисы, в которых рассматриваемые дифференциальные операторы сводятся к полным производным по времени от компонент тензора. Для всех производных из рассматриваемого семейства, кроме производных Олдройда и Коттер–Ривлина, векторы базисов, лежащие в плоскости сдвига, вращаются с определенным периодом, меняя свою длину и взаимную ориентацию.

Ключевые слова: конечные деформации, простой сдвиг, объективные производные, однопараметрическое семейство объективных производных Гордона–Шоуолтера, лагранжево представление объективных производных.

The paper deals with the one-parameter family of Gordon–Showalter objective derivatives, which includes the Oldroyd, Cotter–Rivlin, and Jaumann derivatives. For a simple shift, movable bases were found in which the considered differential operators are reduced to the total time derivatives of the tensor components. For all derivatives of the family under consideration, except for Oldroyd and Cotter–Rivlin derivatives, the vectors of bases lying in the shear plane rotate with a certain period, changing their length and mutual orientation.

Key words: finite deformations, simple shift, objective derivatives, one-parameter family of Gordon–Showalter objective derivatives, Lagrangian representation of objective derivatives.

1. Введение. Принцип материальной объективности, лежащий в основе современной теории определяющих соотношений (ОС) [1], требует, чтобы тензоры, входящие в определяющее соотношение, принадлежали к одному типу объективности, т.е. преобразовывались одинаковым образом при замене системы отсчета. Тензоры, преобразующиеся при переходе к новой системе отсчета по формуле

$$\hat{Z}_*(t) = \hat{\theta}(t)\hat{Z}(t)\hat{\theta}^T(t), \quad (1)$$

где $\hat{\theta}(t)$ — ортогональный тензор перехода к новой системе отсчета, называются индифферентными (пространственно ориентированными или левыми) [2]. Примером является тензор напряжений Коши.

¹ Мартынова Елена Дмитриевна — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. теории упругости мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: elemarta@mail.ru.

Martynova Elena Dmitrievna — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associated Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Theory of Elasticity.

Входящие в ОС производные по времени от тензоров должны сохранять тип их объективности. В частности, для индифферентных тензоров производная $D[\hat{Z}]$ должна быть определена так, чтобы получающийся тензор $D[\hat{Z}]$ также являлся индифферентным, т.е. преобразовывался по формуле (1).

В настоящей работе рассматривается однопараметрическое семейство объективных производных Гордона–Шоултера (Г–Ш) [3]:

$$D_a[\hat{S}] := \hat{S} - \hat{\Omega}\hat{S} + \hat{S}\hat{\Omega} - a(\hat{V}\hat{S} + \hat{S}\hat{V}). \quad (2)$$

Здесь $a \in [-1, 1]$ — скалярный параметр; $\hat{V} = \frac{1}{2}(\hat{D} + \hat{D}^T)$ — тензор скоростей деформации; $\hat{\Omega} = \frac{1}{2}(\hat{D} - \hat{D}^T)$ — тензор скоростей вращения (спин); $\hat{D} = \hat{A}\hat{A}^{-1}$ — тензор скоростей дисторсий; \hat{A} — аффино деформации. Семейство производных (2) является частным случаем трехпараметрического представления производных конвективно-коротационного типа, предложенного в работе Г.Л. Бровко [4]. При $a = 1, -1, 0$ из формулы (2) получаются объективные производные Олдройда, Коттер–Ривлина, Яуманна соответственно [2].

Согласно теореме, доказанной в работе [4], любой дифференциальный оператор из рассматриваемого семейства Г–Ш может быть представлен следующим образом:

$$D_a[\hat{Z}] = \hat{\Delta}(\hat{\Delta}^{-1}\hat{Z}\hat{\Delta}^{-1T}) \cdot \hat{\Delta}^T, \quad (3)$$

где тензор $\hat{\Delta}(t)$ удовлетворяет дифференциальному тензорному уравнению

$$\hat{\Delta} \cdot \hat{\Delta}^{-1} = \hat{\Gamma}. \quad (4)$$

Здесь $\hat{\Gamma} := \hat{\Omega} + a\hat{V}$. Решение этого уравнения имеет вид хронологической экспоненты тензорного процесса [5].

Рассмотрим в трехмерном векторном пространстве некоторый фиксированный базис \bar{e}_k^0 ($k = 1, 2, 3$) и связанный с ним подвижный базис $\bar{e}_k = \hat{\Delta}\bar{e}_k^0$. В соответствующем диадном базисе тензор \hat{Z} представим в виде $\hat{Z} = Z^{ij}\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j = Z^{ij}\hat{\Delta}\bar{e}_i^0 \otimes \bar{e}_j^0\hat{\Delta}^T$. Отсюда получим следующее равенство:

$$\hat{\Delta}(\hat{\Delta}^{-1}\hat{Z}\hat{\Delta}^{-1T}) \cdot \hat{\Delta}^T = \hat{Z}^{ij}\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j.$$

Таким образом, любой дифференциальный оператор из семейства Г–Ш соответствует дифференцированию по времени компонент тензора $\hat{Z}(t)$ в определенном подвижном диадном базисе $\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j = \hat{\Delta}\bar{e}_i^0 \otimes \hat{\Delta}\bar{e}_j^0$, определяемом видом выбранной объективной производной и законом движения. Представление (3) называется лагранжевым представлением объективной производной.

2. Лагранжево представление производных из семейства Г–Ш для движения простого сдвига. Рассмотрим закон движения сплошной среды при простом сдвиге вдоль оси x_2 в плоскости Ox_2x_3 :

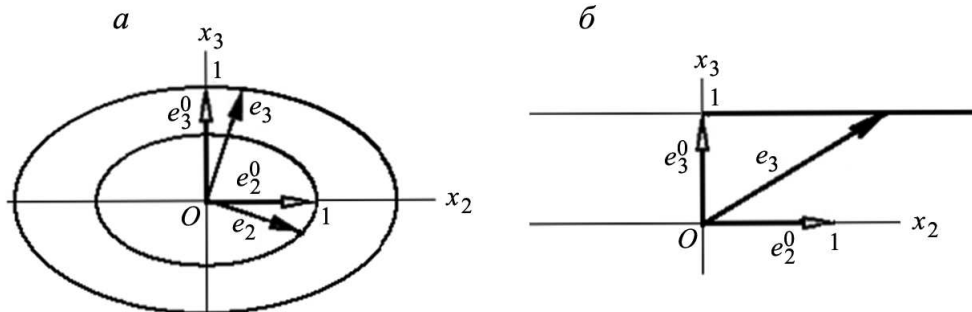
$$x_1 = x_1^0, \quad x_2 = x_2^0 + k(t)x_3^0, \quad x_3 = x_3^0. \quad (5)$$

Здесь x_i^0 и x_i — декартовы координаты материальной точки в начальный и текущий моменты времени. Предполагая далее, что $k(t) = vt$, где $v = \text{const}$, и используя определение хронологической экспоненты, найдем решение уравнения (4) в случае простого сдвига:

$$\hat{\Delta}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \frac{tv\sqrt{1-a^2}}{2} & \sqrt{\frac{1+a}{1-a}} \sin \frac{tv\sqrt{1-a^2}}{2} \\ 0 & -\sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \sin \frac{tv\sqrt{1-a^2}}{2} & \cos \frac{tv\sqrt{1-a^2}}{2} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Заметим, что k -м столбцом этой матрицы являются компоненты вектора $\bar{e}_k = \hat{\Delta}\bar{e}_k^0$. Учитывая, что $x_1 = 0$, $x_2 = c \cos(\tau)$, $x_3 = b \sin(\tau)$ — параметрическое задание эллипса с полуосями b и c , получим, что при движении (5) вектор \bar{e}_1^0 не меняется, а концы векторов \bar{e}_2 и \bar{e}_3 при $a \neq \pm 1$ описывают эллипсы в плоскости Ox_2x_3 (рисунок, а). Это значит, что при простом сдвиге объективные производные из семейства Г–Ш являются материальными производными по времени в базисе, векторы которого вращаются в плоскости сдвига с периодом $4\pi/(v\sqrt{1-a^2})$. При этом длины векторов \bar{e}_2 и \bar{e}_3 и углы между ними меняются. В случае производной Яуманна ($a = 0$) $\hat{\Delta}$ становится ортогональной

матрицей, эллипсы превращаются в окружности единичного радиуса, векторы \bar{e}_2 и \bar{e}_3 вращаются в плоскости Ox_2x_3 , оставаясь ортогональными, и не меняют длины. При $a = 1$ из выражения (6) следует, что для производной Олдройда векторы \bar{e}_1 и \bar{e}_2 не меняются, а вектор \bar{e}_3 поворачивается в плоскости сдвига так, что его конец движется по прямой $x_3 = 1$ (рисунок, б). При $a = -1$, что соответствует производной Коттер–Ривлина, аналогичным образом ведут себя векторы взаимного базиса \bar{e}^1, \bar{e}^2 и \bar{e}^3 .



Годографы векторов $\bar{e}_2 = \Delta \bar{e}_2^0$ и $\bar{e}_3 = \Delta \bar{e}_3^0$ в задаче о простом сдвиге в плоскости Ox_2x_3

Рассмотрим также нейтральную производную, или производную Грина–Нахди, определяемую соотношением $D[\hat{Z}] := \dot{\hat{Z}} - \hat{\Psi}\hat{Z} + \hat{Z}\hat{\Psi}$, где $\hat{\Psi} := \hat{Q}Q^T$ и \hat{Q} – ортогональный тензор из полярного разложения аффинора. Эта производная не принадлежит семейству Г–Ш, но входит в трехпараметрическое семейство, введенное в работе [2], где показано, что в этом случае $\hat{\Delta}$ является ортогональным тензором и удовлетворяет уравнению (4), в котором $\hat{\Gamma} = \hat{\Psi}$. Нетрудно получить, что при простом сдвиге

$$\hat{\Psi}(t) = \frac{2v}{4 + t^2v^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Поскольку $\hat{\Delta}$ – ортогональный тензор, имеют место выражения

$$\hat{\Delta}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi(t) & \sin \psi(t) \\ 0 & -\sin \psi(t) & \cos \psi(t) \end{pmatrix}, \quad \dot{\hat{\Delta}}\hat{\Delta}^{-1} = \dot{\psi}(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Из соотношений (4), (7) и (8) находим $\dot{\psi}(t) = 2v/(\psi(t) = 2v/(4 + t^2v^2))$. Интегрируя это уравнение с начальным условием $\psi(0) = 0$, получим $\psi(t) = \pm \arctg(tv/2) = \pm \arctg(k(t)/2)$, $k(t) = vt$. Поскольку $\arctg(k(t)/2) \rightarrow \pi/2$ при $k(t) \rightarrow \infty$, угол поворота базисных векторов \bar{e}_2^0 и \bar{e}_3^0 в случае нейтральной производной ограничен величиной $\pi/2$ при любой величине сдвига. Это отличает нейтральную производную от производной Яуманна, для которой тензор $\hat{\Delta}$, как следует из соотношения (6), тоже ортогональный, но угол поворота базисных векторов все время возрастает. Можно показать, что угол ψ связан с углом φ между осью x_3 и левым собственным вектором соотношением $\psi = 2\varphi - \pi/2$.

3. Модель вязкоупругого материала при больших деформациях. Рассмотрим модель, примененную ранее в работе [6]:

$$\hat{D}_a[\hat{S}] = E\hat{V} - T^{-1}\hat{S}, \tag{9}$$

где \hat{S} – тензор напряжений Коши; E и T – параметры модели. Используя (3), представим ОС (9) следующим образом: $\hat{\Delta}(\hat{\Delta}^{-1}\hat{S}\hat{\Delta}^{-1T})\cdot\hat{\Delta}^T = E\hat{V} - T^{-1}\hat{S}$. Отсюда получим

$$(\hat{\Delta}^{-1}\hat{S}\hat{\Delta}^{-1T})\cdot = E\hat{\Delta}^{-1}\hat{V}\hat{\Delta}^{-1T} - T^{-1}\hat{\Delta}^{-1}\hat{S}\hat{\Delta}^{-1T}.$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $\hat{S}(0) = 0$, имеет вид

$$\hat{S}(t) = E\hat{\Delta}(t) \int_0^t e^{-\frac{(t-x)}{T}} \hat{\Delta}^{-1}(x)\hat{V}(x)\hat{\Delta}^{-1T}(x) dx \hat{\Delta}^T(t).$$

Подставляя сюда тензор $\hat{\Delta}$ из формулы (6) и соответствующий простому сдвигу тензор скорости деформации \hat{V} , получим определяющий тензор напряжений Коши \hat{S} в задаче о простом сдвиге, совпадающий с приведенным в работе [6], где он найден в результате решения системы дифференциальных уравнений (9).

4. Заключение. Для кинематики простого сдвига найдены подвижные векторные базисы, в которых рассматриваемые в работе объективные производные тензоров второго ранга сводятся к производным по времени от их компонент. Полученное представление объективных производных позволило выразить тензор напряжений Коши в задаче о простом сдвиге в виде интеграла от известных функций.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 16-01-00669 А).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Труделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975.
2. *Бровко Г.Л.* Определяющие соотношения механики сплошной среды. Развитие математического аппарата и основ общей теории. М.: Наука, 2017.
3. *Gordon R.J., Schowalter W.R.* Anisotropic fluid theory: a different approach to the dumbbell theory of dilute polymer solutions // *Trans. Soc. Rheol.* 1972. **16**. 79–97.
4. *Бровко Г.Л.* Свойства и интегрирование некоторых производных от тензорных процессов в механике сплошной среды // *Изв. РАН. Механ. твердого тела.* 1990. № 2. 54–60.
5. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. Методы и приложения. 2-е изд., перераб. М.: Наука, 1986.
6. *Мартынова Е.Д., Стеценко Н.С.* Использование однопараметрического семейства объективных производных Гордона–Шоултера для описания конечных деформаций вязкоупругих тел // *Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ.* 2017. № 6. 64–68.

Поступила в редакцию
17.07.2019

УДК 539.3

МЕТОД УСКОРЕННОЙ СХОДИМОСТИ В ЗАДАЧЕ О КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ НЕОДНОРОДНОГО ПО ТОЛЩИНЕ КРУГЛОГО ДИСКА

Л. Д. Акуленко¹, **Д. В. Георгиевский**², **С. В. Нестеров**³

На основе разработанного авторами метода ускоренной сходимости численно-аналитически исследуются крутильные колебания насаженного на ось упругого диска, толщина которого зависит от радиуса. Внутренняя граница диска прикреплена к оси, тогда как внешняя свободна от нагрузок. Для различных отношений внешнего и внутреннего радиусов диска и разных распределений масс находятся первые частоты собственных крутильных колебаний.

Ключевые слова: крутильные колебания, круглый диск, задача Штурма–Лиувилля, метод ускоренной сходимости.

On the basis of the advanced convergence method developed by the authors, torsional

¹ *Акуленко Леонид Денисович* — доктор физ.-мат. наук, проф., вед. науч. сотр. ИПМех им. А.Ю. Ишлинского РАН.

² *Георгиевский Дмитрий Владимирович* — доктор физ.-мат. наук, проф., зав. каф. теории упругости мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: georgiev@mech.math.msu.su.

³ *Нестеров Сергей Владимирович* — доктор физ.-мат. наук, проф., вед. науч. сотр. ИПМех им. А.Ю. Ишлинского РАН, e-mail: kumak@ipmnet.ru.

Akulenko Leonid Denisovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Leading Scientific Researcher, A.Yu. Ishlinskii Institute for Problems in Mechanics of RAS.

Georgievskii Dimitri Vladimirovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Head of the Chair of Elasticity Theory.

Nesterov Sergey Vladimirovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Leading Scientific Researcher, A.Yu. Ishlinskii Institute for Problems in Mechanics of RAS.

vibrations of a circular disk which is fixed on a shaft are investigated numerically and analytically. Thickness of the disk depends on the radius. The internal boundary of the disk is fixed on a shaft while the external one is free of loadings. The first few eigenvalue frequencies of torsional oscillations are obtained for various ratio of the external disk radius and the internal one as well as for various mass distributions.

Key words: torsional vibrations, circular disk, the Sturm–Liouville problem, advanced convergence method.

Под крутильными колебаниями диска, закрепленного на абсолютно жесткой оси, проходящей через его центр, понимается деформированное состояние, в котором цилиндрические слои различных радиусов поворачиваются друг относительно друга. В результате точки диска, первоначально лежавшие на одном радиусе, оказываются на некоторой спиралевидной кривой [1, 2]. Малые крутильные осесимметричные колебания диска из линейно упругого материала описываются одномерным волновым уравнением [3] относительно неизвестной функции $\varphi(r, t)$:

$$\rho r^3 H(r) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial}{\partial r} \left(r^3 H(r) \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right), \quad b < r < a, \tag{1}$$

где a — внешний радиус диска; b — его внутренний радиус, равный радиусу оси, на которой закреплен диск; ρ — плотность; $H(r)$ — переменная по радиусу толщина; μ — модуль сдвига; φ — угол поворота цилиндрического слоя, находящегося на расстоянии r , по отношению к его состоянию при отсутствии деформации.

Стандартное разделение переменных $\varphi(r, t) = R(r)T(t)$ сводит уравнение (1) к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$\frac{d}{dr} \left(r^3 H(r) \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\lambda}{(a-b)^2} r^3 H(r) R = 0, \tag{2}$$

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \frac{\lambda}{(a-b)^2} c^2 T = 0, \tag{3}$$

где $c = \sqrt{\mu/\rho}$ — скорость поперечных волн в упругом материале диска; $\lambda/(a-b)^2$ — постоянная разделения.

С целью интегрирования уравнения (2) при заданном законе изменения толщины $H(r)$ для определенности выберем следующие граничные условия: внутренний край диска жестко скреплен с осью, а внешний край свободен от усилий:

$$R(b) = 0, \quad \frac{dR}{dr}(a) = 0. \tag{4}$$

Представляет как практический, так и вычислительный интерес аппроксимация толщины $H(r)$ степенными функциями вида [3]

$$H(r) = H_0 \left(\frac{b}{r} \right)^k, \quad k = 3, 2, 1, 0, -1. \tag{5}$$

Таким образом, возникающая задача Штурма–Лиувилля заключается в нахождении значений параметра λ , при которых существуют нетривиальные решения уравнения (2) с граничными условиями (4). Из общей теории задачи Штурма–Лиувилля известно, что существует счетное множество таких значений: $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$

Уравнение (2), очевидно, допускает аналитическое решение, если $H(r) = H_0(b/r)^3$, т.е. при $k = 3$ в (5). В этом случае интегрирование задачи (2), (4) приводит к следующим собственным значениям и собственным функциям:

$$\lambda_n = \frac{\pi^2}{4} (2n + 1)^2, \quad R_n(r) = C_n \sin \left(\sqrt{\lambda_n} \frac{r-b}{a-b} \right) = C_n \sin \left((2n + 1) \frac{\pi(r-b)}{2(a-b)} \right).$$

Периодические решения уравнения (3) записываются в виде

$$T_n(t) = A_n e^{ic\Omega_n t/b}, \quad \Omega_n = \frac{\sqrt{\lambda_n}}{\gamma - 1} = \frac{\pi(2n + 1)}{2(\gamma - 1)}, \quad \gamma = \frac{a}{b} > 1, \tag{6}$$

где Ω_n — безразмерные частоты колебаний, зависящие от отношения граничных радиусов диска.

Отметим, что аналитическое решение задачи (2), (4) допустимо и для более общей зависимости толщины от радиуса: $H(r) = H_0(b/r)^3 e^{-\varkappa r}$, $\varkappa = \text{const}$. Имеются и другие зависимости $H(r)$, при которых существуют аналитические решения, выраженные через специальные функции. Не останавливаясь на них, перейдем к численному анализу крутильных колебаний диска на основе разработанного авторами [4] метода ускоренной сходимости.

Введем новую безразмерную пространственную переменную x :

$$x = \frac{r-b}{a-b}, \quad 0 < x < 1$$

и преобразуем задачу (2), (4), (5) к виду

$$\frac{d}{dx} \left[(1 + (\gamma - 1)x)^{3-k} \frac{dR}{dx} \right] + \lambda (1 + (\gamma - 1)x)^{3-k} R = 0, \quad R(0) = 0, \quad \frac{dR}{dx}(1) = 0. \quad (7)$$

| γ | Ω_1 | Ω_2 | Ω_3 | Ω_4 |
|----------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 10 | 0,0286; 0,0123 | 0,5331; 0,5824 | 0,8852; 0,9282 | 1,2833; 1,2696 |
| 9 | 0,0355; 0,0159 | 0,5970; 0,6493 | 0,9991; 1,0375 | 1,3849; 1,4218 |
| 8 | 0,0451; 0,0215 | 0,6788; 0,7343 | 1,1315; 1,1771 | 1,5797; 1,6168 |
| 7 | 0,0593; 0,0300 | 0,7873; 0,8459 | 1,3158; 1,3621 | 1,8393; 1,8761 |
| 6 | 0,0814; 0,0442 | 0,9387; 0,9997 | 1,5734; 1,6197 | 2,2025; 2,2385 |
| 5 | 0,1191; 0,0702 | 1,1649; 1,2269 | 1,9597; 2,0044 | 2,7473; 2,7813 |
| 4 | 0,1916; 0,1242 | 1,5416; 1,6009 | 2,6036; 2,6440 | 3,6557; 3,6857 |
| 3 | 0,3625; 0,2633 | 2,2972; 2,3447 | 3,8938; 3,9243 | 5,4745; 5,4968 |
| 2 | 0,9866; 0,8250 | 4,5887; 4,6005 | 7,7815; 7,7891 | 10,944; 10,950 |

Приведем для некоторых значений k результаты численно-аналитического решения задачи (7). В таблице для $k = 0$, т.е. в случае постоянной толщины H_0 , и для $k = -1$ (случай линейно расширяющегося к периферии диска) представлены первые четыре безразмерные частоты крутильных колебаний диска $\Omega_n = \sqrt{\lambda_n}/(\gamma - 1)$, $n = 1, 2, 3, 4$, в зависимости от γ . В каждом элементе таблицы левое число соответствует значению $k = 0$, а правое — значению $k = -1$. Размерные частоты колебаний на основании (6) равны $c\Omega_n/b$.

Как следует из приведенных численных результатов, безразмерные частоты колебаний убывают с ростом параметра γ . Это утверждение справедливо для других k и для других, отличных от (4) граничных условий. Так, в аналитически исследованном выше случае $k = 3$ согласно (6) убывание Ω_n с ростом γ происходит просто по гиперболе.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 19-01-00016а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вибрации в технике: Справочник: В 6 т./ Под ред. В.В. Болотина. Т. 1. М.: Машиностроение, 1978.
2. Маслов Г.С. Расчеты колебаний валов: Справочник. 2-е изд. М.: Машиностроение, 1980.
3. Пфейффер П. Колебания упругих тел. 2-е изд. М.: КомКнига, 2006 (*Pfeiffer F. Handbuch der Physik. B. VI. Mechanik der Elastischen Körper. Berlin: Springer, 1928*).
4. Akulenko L.D., Nesterov S.V. High-Precision Method in Eigenvalue Problems and Their Applications. London: Chapman and Hall/CRC. Boca Raton, 2005.

Поступила в редакцию
28.02.2020

Указатель статей и материалов, опубликованных в журнале “Вестник Московского университета. Сер. 1, Математика. Механика” в 2020 году

| <i>Математика</i> | № | С. |
|--|---|----|
| <i>Алимов А. Р.</i> Геометрическое строение чебышёвских множеств и солнц в трехмерных пространствах с цилиндрической нормой | 5 | 26 |
| <i>Арушанян О. Б., Залеткин С. Ф.</i> О вычислении приближенного решения обыкновенных дифференциальных уравнений методом рядов Чебышёва и оценка его погрешности | 5 | 22 |
| <i>Бабин Д. Н., Кудрявцев В. Б.</i> О классах автоматов, вложимых в предполные | 2 | 55 |
| <i>Боков Г. В., Дробышев А. С.</i> Критерий нейропорожденности автоматных функций с задержкой | 6 | 54 |
| <i>Ведюшкина В. В., Кибкало В. А.</i> Реализация бильярдами числового инварианта расслоения Зейферта интегрируемых систем | 4 | 22 |
| <i>Ведюшкина В. В.</i> Слоение Лиувилля бильярдной книжки, моделирующей случай Горячева–Чаплыгина | 1 | 64 |
| <i>Ветохин А. Н.</i> Строение множеств точек полунепрерывности ε -емкости неавтономных динамических систем, непрерывно зависящих от параметра | 6 | 19 |
| <i>Воронов С. М.</i> Об аналоге признака Харди–Литлвуда для рядов Фурье по системе Виленкина в случае неограниченных p_k | 2 | 49 |
| <i>Вуколова Т. М., Симонов Б. В.</i> О свойствах сумм двойных тригонометрических рядов с кратно-монотонными коэффициентами | 5 | 8 |
| <i>Гасанов Э. Э., Комилова И. М.</i> Конструирование многоцветных изображений клеточными автоматами | 2 | 22 |
| <i>Гашков С. Б.</i> Замечание о быстром вычислении транзитивного замыкания графов и умножении целочисленных матриц | 6 | 14 |
| <i>Давыдов А. В.</i> Спектральный анализ интегродифференциальных операторов, возникающих при изучении флаттера вязкоупругой пластины | 2 | 15 |
| <i>Десяткин Л. Ю.</i> Континуальность множества замкнутых классов P_{k+1} , которые можно гомоморфно отобразить на P_k | 1 | 69 |
| <i>Дрозев Е. М.</i> Об оценке норм матриц с произвольными элементами, постоянными в двоичных блоках | 3 | 46 |
| <i>Жила А. И.</i> Топологические типы изоэнергетических поверхностей системы “шар Чаплыгина с ротором” | 3 | 52 |
| <i>Захарян Ю. Н., Фоменко Т. Н.</i> О точках совпадения для пары многозначных отображений типа Замфиреску | 6 | 26 |
| <i>Карпенко А. В.</i> Новые свойства двумерных максимумов признаков частиц в ветвящихся процессах с непрерывным временем | 1 | 17 |
| <i>Кибкало В. А.</i> Свойство некомпактности слоев и особенностей неевклидовой системы Ковалевской на пучке алгебр Ли | 6 | 56 |
| <i>Козловская Т. Д.</i> О множествах единственности для рядов Уолша–Пэли | 3 | 56 |
| <i>Комков С. А.</i> Новая формулировка критерия минимального логарифмического темпа роста | 5 | 60 |
| <i>Коновалов А. Ю.</i> Обобщенная реализуемость и принцип Маркова | 1 | 60 |
| <i>Крупский В. Н.</i> О точных логиках свидетельств | 1 | 71 |
| <i>Кудрявцев Н. Л.</i> О связи t -членных и наилучших приближений некоторых классов последовательностей в пространствах l_p | 1 | 28 |
| <i>Лата А. Н.</i> Унарные алгебры без собственных подалгебр | 6 | 60 |
| <i>Лукашенко Т. П.</i> Ортонормированные базисы многомерных тригонометрических многочленов из сдвигов одного из них | 3 | 48 |
| <i>Мартыанов Е. В.</i> Сохранение факторизуемости G -пространств эквивариантными отображениями | 1 | 56 |
| <i>Мирзоев К. А., Конечная Н. Н.</i> Об асимптотике решений линейных дифференциальных уравнений нечетного порядка | 1 | 23 |
| <i>Москвин В. А.</i> Алгоритмическое построение двумерных особых слоев атомов бильярдов в невыпуклых областях | 3 | 3 |
| <i>Муромская А. А.</i> Вероятность разорения в моделях со стохастическими премиями | 4 | 57 |
| <i>Немиро В. В.</i> Эндоморфизмы полугрупп обратимых неотрицательных матриц над упорядоченными ассоциативными кольцами | 5 | 3 |
| <i>Никулин С. И., Розанова О. С.</i> О некоторых аналитически решаемых задачах теории игр среднего поля | 4 | 3 |
| <i>Потапов М. К., Симонов Б. В.</i> Оценки частных модулей гладкости в метриках $L_{p_1\infty}$ и $L_{\infty p_2}$ через частные модули гладкости в метриках $L_{p_1 p_2}$ | 1 | 3 |
| <i>Проскурнин И. А.</i> Нормальные формы эквивариантных функций | 2 | 51 |
| <i>Решетников И. А., Канель-Белов А. Я.</i> Критерий подстановочности палиндромов Штурма и одномерная фактор-динамика | 5 | 57 |

| | | |
|---|---|----|
| <i>Рудakov И. А.</i> Уравнение колебаний балки с закрепленным и шарнирно опертым концами | 2 | 3 |
| <i>Сафонов Г. В., Божов Г. В., Кудрявцев В. В.</i> О неприводимости булевых функций относительно коммутативной ассоциативной операции | 4 | 51 |
| <i>Семенов А. Л.</i> Отображения, сохраняющие отношения, определяемые через линейный порядок | 5 | 62 |
| <i>Сергеев И. С.</i> Многоярусное представление и сложность схем из многоходовых элементов | 3 | 42 |
| <i>Сорин В. В.</i> О сильных формах однородности топологических пространств | 3 | 39 |
| <i>Сорин Г. В.</i> О связности стоун-чеховского нароста | 2 | 46 |
| <i>Трифопова В. А.</i> Критерии высотности атома | 3 | 12 |
| <i>Фоменко Т. Н., Ястребов К. С.</i> Метод поиска нулей функционалов в коническом метрическом пространстве и вопросы его устойчивости | 2 | 8 |
| <i>Харчева И. С.</i> Изознергетические многообразия интегрируемых бильярдных книжек | 4 | 12 |
| <i>Чубариков В. Н.</i> О кратных тригонометрических суммах, связанных с простыми числами | 6 | 3 |
| <i>Шамаев А. С., Шумилова В. В.</i> Спектр одномерных собственных колебаний слоистой среды, состоящей из упругого материала и вязкой несжимаемой жидкости | 4 | 53 |
| <i>Игорь Германович Царьков (к шестидесятилетию со дня рождения)</i> | 4 | 70 |

Механика

| | | |
|---|---|----|
| Акуленко Л. Д. , Георгиевский Д. В., Нестеров С. В. Метод ускоренной сходимости в задаче о крутильных колебаниях неоднородного по толщине круглого диска | 6 | 66 |
| <i>Бугров Д. И., Формальский А. М.</i> Об изменении множества достижимости при редукции задачи | 2 | 58 |
| <i>Влахова А. В., Новодерова А. П.</i> Занос колесного аппарата на “миксте” | 5 | 38 |
| <i>Гусак Г. В.</i> Гистерезисные потери при нагрузке–разгрузке колеса со стержневым протектором | 2 | 28 |
| <i>Звягин А. В., Удалов А. С.</i> Метод разрывных смещений высокого порядка точности в механике трещин | 6 | 34 |
| <i>Исраилов М. Ш., Носов С. Е., Хадисов М.-Р. Б.</i> Решение смешанных задач дифракции нестационарных плоских и цилиндрических волн на полуплоскости и защита от взрывных волн барьерами | 3 | 58 |
| <i>Исраилов М. Ш.</i> Решение задач дифракции акустических волн на полуплоскости при импедансных краевых условиях на одной из ее сторон и приложения к звуковым барьерам | 1 | 42 |
| <i>Карапетян А. В., Чаплыгина М. П.</i> Бифуркационный анализ системы трех связанных тел в однородном гравитационном поле | 6 | 40 |
| <i>Карапетян А. В., Шишков А. А.</i> Динамика конька Чаплыгина на горизонтальной плоскости с сухим анизотропным трением | 2 | 61 |
| <i>Карликов В. П., Нечаяев А. Т., Толоконников С. Л.</i> Об особенностях проникания вертикальных свободных турбулентных струй через поверхность жидкости в узких каналах разной протяженности | 4 | 61 |
| <i>Климина Л. А., Шалимова Е. С., Досаев М. З., Селюцкий Ю. Д.</i> Двойная ветротурбина, работающая на основе эффекта Магнуса | 4 | 65 |
| <i>Коноваленко И. С.</i> О построении множества достижимости в окрестности периодического аттрактора | 3 | 67 |
| <i>Конон П. Н., Мозилевский Е. И., Сичко Г. Н., Шжадов В. Я.</i> Равновесие капли жидкости на вращающемся диске | 4 | 43 |
| <i>Кугушев Е. И., Попова Т. В., Сазонов С. В.</i> О движении системы с перемещающимся внутренним элементом при наличии внешнего вязкого трения | 5 | 50 |
| <i>Леонтьев Н. Е., Рошин Е. И.</i> Точные решения задачи об объемной фильтрации малоконцентрированной суспензии | 4 | 37 |
| <i>Мартынова Е. Д.</i> Лагранжево представление семейства объективных производных Гордона–Шоултера при простом сдвиге | 6 | 63 |
| <i>Молодцов И. Н.</i> Прикладные вопросы теории упругопластических процессов А.А. Ильюшина | 5 | 33 |
| <i>Садрисламов А. У.</i> Резонансные эффекты колебаний газового пузырька в невязкой и ньютоновской средах | 5 | 66 |
| <i>Тирский Г. А., Брыкина И. Г., Жлуктов С. В.</i> Численно-аналитический метод решения уравнений физической теории метеоров при переменном параметре абляции | 6 | 48 |
| <i>Толоконников С. Л.</i> К задаче о взрыве поверхностного шнурового заряда | 1 | 75 |
| <i>Тунгускова З. Г.</i> Исследование напряженно-деформированного состояния гипотупругого цилиндрического слоя при конечных деформациях | 2 | 35 |
| <i>Турцынский М. К.</i> О свойствах решений уравнений газовой динамики на вращающейся плоскости, отвечающих движениям с однородной деформацией | 2 | 39 |
| <i>Хозлов А. В.</i> Критерии немонотонности и отрицательности коэффициента Пуассона изотропных вязкоупругих материалов, описываемых нелинейным соотношением Работнова | 3 | 32 |
| <i>Шабайкин Р. Р.</i> Динамические эффекты деформирования тонкого пластического слоя между сближающимися жесткими цилиндрами | 4 | 29 |

| | | |
|--|---|----|
| <i>Шамин А. Ю.</i> Динамика саней Чаплыгина на горизонтальной плоскости с трением | 1 | 48 |
| <i>Шарафутдинов Г. З.</i> О прогнозировании процессов высокотемпературной ползучести металлов | 3 | 25 |
| <i>Шарафутдинов Г. З.</i> Растяжение кусочно-однородного композитного стержня | 1 | 37 |
| <i>Шматков А. М.</i> Периодические решения задачи оптимального управления поворотом твердого тела с помощью внутренней массы | 3 | 63 |
| <i>Памяти Рудольфа Алексеевича Васина (1937–2019)</i> | 5 | 71 |

ПРАВИЛА

подготовки рукописей, представляемых для опубликования в журнале “Вестник Московского университета. Сер. 1, Математика. Механика”

Журнал печатает статьи по всем разделам математики и механики. Журнал открыт для публикации научных исследований ученых Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, других научных учреждений и высших учебных заведений.

Объем статьи (включая таблицы и список литературы) ограничен тремя уровнями: а) 12 страниц с числом иллюстраций до пяти; б) 6 страниц с числом иллюстраций до трех; в) 4 страницы с числом иллюстраций до двух. К статьям объемом 7–12 страниц предъявляются повышенные требования; очередность их опубликования определяется отдельно. В статьях объемом до 6 страниц предполагается четкое представление основных результатов без излишних деталей выводов и доказательств. Статьи объемом до 4 страниц печатаются в разделе “Краткие сообщения” вне очереди.

Принимаются статьи, набранные на компьютере в формате LATEX версии 2.09 (см. правила оформления электронной версии по следующему адресу: <http://vestnik.math.msu.su/>). Рукопись представляется в редакцию на русском языке в двух экземплярах на листах формата А4 с полями 2 см слева и справа, 4 см сверху и снизу. Необходимо также представить в редакцию CD-диск с файлом статьи.

Чертежи, рисунки, схемы, графики выполняются на отдельных листах в формате, обеспечивающем ясность передачи деталей. Места расположения иллюстраций в тексте должны быть указаны простым карандашом на полях. На обороте иллюстрации должны быть написаны фамилия автора и название статьи. Текст к иллюстрациям, а также таблицы следует поместить на отдельных страницах.

Список литературы должен содержать библиографические сведения о всех публикациях, упоминаемых в статье, и не должен содержать указания на работы, на которые в тексте нет ссылок. Располагать публикации в списке следует в порядке упоминания о них в статье. Список литературы приводится на отдельном листе с обязательным указанием следующих данных: для книг (монография, сборник и т.д.) — фамилия и инициалы автора, название книги, место издания (город), издательство, год издания; для журнальных статей — фамилия и инициалы автора, название статьи, название журнала, год издания, том, номер, выпуск, страницы (первая и последняя).

Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

В левом верхнем углу первого листа рукописи проставляется УДК. Ниже указываются название статьи, еще ниже — инициалы и фамилии авторов. Далее помещаются резюме на русском языке, ключевые слова на русском языке, резюме на английском языке, ключевые слова на английском языке. Резюме объемом до 7 строк не должно содержать ссылки на разделы, иллюстрации, номера цитируемой литературы, формулы и рисунки. Кроме того, прилагается библиографическое описание статьи (фамилии, инициалы авторов, название статьи) на английском языке.

Сокращения слов, имен, названий не допускаются, за исключением общепринятых сокращений математических величин и терминов, мер физических и химических величин.

Нумерация теорем, лемм, утверждений и формул (справа) производится в порядке возрастания номеров на протяжении всей статьи без пропусков и повторений. Нумеруются только те формулы, на которые есть ссылки.

Текст статьи должен быть подписан всеми авторами “в печать”. Отдельно нужно указать фамилии, имена, отчества всех авторов, ученую степень, ученое звание, место работы, должность, полный почтовый адрес, номер телефона (служебный и домашний) и e-mail каждого соавтора; авторский коллектив должен указать также лицо, с которым редакция будет вести переговоры и переписку.

Автору предоставляется корректура статьи. Никакие изменения верстки, за исключением исправления опечаток и восстановления пропущенного при наборе, не допускаются. Выправленную и подписанную корректуру следует в течение двух дней после получения вернуть в редакцию.

Обращаем внимание авторов на то, что, направляя свою статью в журнал, они тем самым дают согласие на обнародование ее путем издания на русском языке в данном журнале и согласие на обнародование, перевод и издание статьи на английском языке американским издательством “Аллертон Пресс” (<http://www.allertonpress.com>), которому предоставлено исключительное право перевода, издания и распространения англоязычной версии журнала и его статей по всему миру.

Электронные версии статей на английском языке можно найти по адресу: <http://www.springerlink.com>.

За англоязычное издание статей авторам выплачивается гонорар. Для получения гонорара авторам следует обращаться в Российское авторское общество (РАО) по адресу: 123995, Москва, ГСП-5, ул. Б. Бронная, 6А, РАО, Отдел валютных расчетов. Тел.: 8 (495) 697-33-35.

При несоблюдении автором вышеприведенных правил редакция журнала оставляет за собой право задержать публикацию статьи или отклонить рукопись без ее рассмотрения по существу.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Рукописи принимаются по адресу: 119992, Москва, Ленинские горы, Главное здание МГУ, механико-математический факультет, комн. 13-25. Тел.: 8 (495) 939-51-27, e-mail: msu-vestmm@mail.ru.

Рукописи, присланные по почте, а также по электронной почте, к рассмотрению не принимаются и не возвращаются.